מתמטיקה בדידה – תרגיל 11- פתרונות

1. הוכיחו כי:

א. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$

ב. $\left|\mathbb{N}^{2012}\times\mathbb{R}\right|=\left|\mathbb{R}^{2012}\right|$

ג. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|>\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$

ד. $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right|=\left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$

ה. $|P(\mathbb{R})|=|P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|$

ו. $|P(\mathbb{R})|=|P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})|$

<u>**פתרון**</u>:

א. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|=\left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right|=\left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right|=\left|2^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$

ב. $\left|\mathbb{N}^{2012}\times\mathbb{R}\right|=\left|\mathbb{N}^{2012}\right|\cdot|\mathbb{R}|=\aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{2012}=\left|\mathbb{R}^{2012}\right|$

ג. לפי מפשט קנטור: $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|=\left(2^{|\mathbb{N}|}\right)^{2^{|\mathbb{N}|}}=2^{\left|\mathbb{N}\times 2^{\mathbb{N}}\right|}=2^{2^{|\mathbb{N}|}}>2^{|\mathbb{N}|}=\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$

ד. $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right|=2^{|\mathbb{R}|}=2^{2^{|\mathbb{N}|}}\underset{previous\ part}{=}\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|=\left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$

ה. נוכיח קודם ש- $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=2^{\aleph_0}$. ברור כי $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|\le 2^{\aleph_0}$ ולכן אם $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|<2^{\aleph_0}$ אז $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|\le\aleph_0$. אם כך, $|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|+|\mathbb{Q}|\le\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$. קיבלנו סתירה ולכן $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=2^{\aleph_0}$.

נוכיח טענת עזר: אם X,Y קבוצות כך ש- $|X|\le|Y|$ אזי $|P(X)|\le|P(Y)|$.

<u>הוכחה</u>: מהנתון קיימת פונקציה $f:X\to Y$ חח"ע. נגדיר $F:P(X)\to P(Y)$ באופן הבא: $F(A)=f[A]$. פונקציה זאת חח"ע. מש"ל.

מכאן מקבלים מיידית כי $|P(\mathbb{R})|=|P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|$

ו. $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=2^{\aleph_0}$. נשים לב שכל $X\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ שאינה ריקה כוללת מספרים אי-רציונאליים ולכן $X\subset\mathbb{R}$ וגם $X\not\subset\mathbb{Q}$. מבאן: $P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subset\left(P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})\right)\cup\{\varnothing\}$

ומכאן לפי הסעיף הקודם:

$|P(\mathbb{R})|=|P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|\le\left|\left(P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})\right)\cup\{\varnothing\}\right|=|P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})|\le|P(\mathbb{R})|$. ועתה לפי $C-B$ נקבל $|P(\mathbb{R})|=|P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})|$.

2. הוכיחו שקיימות $B,C\subseteq A$ כך ש $B\cup C=A$, $B\cap C=\phi$ ו- $|B|=|C|=|A|$.

<u>**פתרון**</u>:

לכל עוצמה אינסופית a, מתקיים $a+a=a$ ולכן קיימות A_1,A_2 זרות כך ש- $|A_1|=|A_2|=a$ ו- $|A_1\cup A_2|=a$. לכן קיימת $f:A_1\cup A_2\to A$ הפיכה. נסמן $B=f[A_1]$ ו- $C=f[A_2]$. מאחר ו- f הפיכה מתקיים $B\cup C=A$ (כי f על), $B\cap C=\phi$ (כי f חח"ע ו- A_1,A_2 זרות) ו- $|B|=|C|=a$ (כי f חח"ע ועל).

3. תהיו A ו- B קבוצות, B קבוצה אינסופית. נסמן $|A|=a$, $|B|=b$ ונניח ש $1<a\le b$. הוכיחו שעוצמת הקבוצה $\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})$ היא b.

<u>**פתרון**</u>: $b=|B|\le|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|$ ע"י בחירת $x_0\in A$ (קיים כזה) והגדרת פונק' חח"ע $f:B\to\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})$ ע"י $f(b)=(b,x_0)$. מצד שני: $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|\le|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$ (השתמשנו בעובדה $|B\times\{x\}|=|B|\cdot 1=|B|$ ושלכל עוצמה אינסופית b, $a\cdot b=\max\{a,b\}$). לכן לפי קנטור-ברנשטיין $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|=b$.

פתרון זריז יותר: $\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})=B\times A$ (למה?) ולכן $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|=|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$.

4. תהי F קבוצת כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$, ותהי G קבוצת כל הפונקציות מ- F ל- F.

א. מהי העוצמה של G?

ב. האם העוצמה של G שווה לעוצמת אחת מן הקבוצות הבאות: $P(P(P(\mathbb{Q})))$, $P(P(P(P(\mathbb{Q}))))$? אם כן לאיזו?

ג. מהי עוצמת הקבוצה הבאה: $U=\{A\subseteq\mathbb{R}^3 \mid$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית $A\}$?

<u>**פתרון**</u>:

א. $F=\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $G=F^F$. לכן לפי הגדרת החזקה של עוצמות, $|G|=|F^F|=|\mathbb{R}^\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}^\mathbb{R}|}=\left(\aleph^\aleph\right)^{\left(\aleph^\aleph\right)}=\aleph^{\left(\aleph\cdot\aleph^\aleph\right)}=\aleph^{\left(\aleph^\aleph\right)}=\aleph^{2^\aleph}=2^{2^\aleph}$. השתמשנו בעובדות הבאות: $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$, $2^a=a^a$ עבור עוצמות אינסופיות (נובע מ- $a\cdot a=a$ ו- $a<2^a$), וגם אם $a\le b$ אז $a\cdot b=b$ עבור b עוצמה אינסופית.

ב. G שקול לעוצמה $P(P(P(\mathbb{Q})))$ -

$$|\mathbb{Q}|=\aleph_0,\quad |P(\mathbb{Q})|=2^{\aleph_0}=\aleph,\quad |P(P(\mathbb{Q}))|=2^\aleph,\quad |P(P(P(\mathbb{Q})))|=2^{2^\aleph}$$

ג. ידוע מאלגברה שקבוצה בלתי תלויות ליניארית מכילה אחד, שתיים או שלושה וקטורים וכל אחד מהם מהצורה (x,y,z), כאשר $x,y,z\in\mathbb{R}$. נוכיח שיש לא יותר מ- $\aleph$ קבוצות בת"ל שמכילות 3 וקטורים. נסמן את קבוצת קבוצות כאלה ב- S. נבנה פונקציה: $f:S\to\mathbb{R}^9$ באופן הבא: $\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}\xrightarrow{f}(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3)$. זאת פונקציה חח"ע ולכן עוצמה של S לכל היותר: $\aleph=|\underbrace{\aleph\times\aleph\times\cdots\times\aleph}_{9\text{ times}}|=|\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{9\text{ times}}|$.

באותו האופן מוכיחים שיש לכל היותר $\aleph$ קבוצות בת"ל בעלות שני וקטורים ווקטור אחד. ולכן בסה"כ יש $\aleph=\aleph+\aleph+\aleph$ קבוצות בת"ל, כלומר $|U|\le\aleph$.

מצד שני, כל קבוצה $A_\alpha=\{(\alpha,0,0)\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ היא קבוצה בלתי תלויה. כלומר מצאנו $\aleph$ איברים שונים של U ולכן $\aleph\le|U|$. ולכן לפי משפט קנטור-ברנשטיין $|U|=\aleph$.

5. מצא קבוצה סדורה חלקית שיש בה איבר מינימאלי יחיד ואין בה איבר קטן ביותר.

<u>**פתרון**</u>:

נסתכל בקבוצה $\mathbb{Z}\cup\left\{\sqrt{3}\right\}$. נגדיר את הסדר החלקי כדלקמן – בין כל שני איבר של $\mathbb{Z}$ מדובר בסדר הרגיל $\le$ ו- $\sqrt{3}$ אינו ניתן להשוואת עם שום איבר של $\mathbb{Z}$. קל לראות שהקבוצה שהתקבלה היא קבוצה סדורה חלקית. $\sqrt{3}$ הוא איבר מינימאלי יחיד ואין איבר קטן ביותר.

6. תהי A קבוצת הקבוצות האינסופיות של מספרים טבעיים כך שגם המשלימים שלהם ביחס ל- $\mathbb{N}$ אינסופיים (למשל מספרים זוגיים ואי-זוגיים). הוכיחו שבקבוצה סדורה חלקית $(A,\subset)$ אין הן איבר מינימאלי הן איבר מקסימאלי.

<u>**פתרון**</u>:

יהי $X \in A$. X הוא קבוצה אינסופית, כך גם המשלים שלה ביחס ל- $\mathbb{N}$. ניקח $t \in \overline{X}$ ונתבונן בקבוצה $Y = X \cup \{t\}$ קבוצה אינסופית ובעלת משלים אינסופי. כמו כן $X \subset Y$.

נגדיר $Z = X \setminus \{t\}$. גם קבוצה זאת אינסופית בעלת משלים אינסופי, כמו כן $Z \subset X$.

לכן X אינה קבוצה מינימאלית ואינה קבוצה מקסימאלית. זה נכון לכל $X \in A$ ולכן אין ל- A הן איבר מינימאלי הן איבר מקסימאלי.

7. תהי B שרשרת ב- $(A,\prec)$. הוכיחו ש- B שרשרת מקסימאלית אמ"ם אין איבר ב- $A \setminus B$ שניתן להשוואה עם כל איברי B.

<u>**פתרון**</u>:

נוכיח את הטענה ההופכית: B אינה שרשרת מקסימאלית אמ"ם קיים איבר ב- $A \setminus B$ שניתן להשוואה עם כל איברי B.

- אם B שרשרת ו- $a \in A \setminus B$ כך ש- a ניתן להשוואה עם כל איברי B אז ב- $B \cup \{a\}$ כל שני איברים ניתנים להשוואה. לכן $B \cup \{a\}$ הינה שרשרת ו- $B \subset B \cup \{a\}$. לכן B אינה מקסימאלית.
- אם B אינה מקסימאלית, תהי D שרשרת כך ש- $B \subset D$. יהי $a \in D \setminus B$ אז מכיוון ש- D שרשרת, a ניתן להשוואה עם כל האיברים של B וגם $a \in A \setminus B$.

8. הוכיחו כי $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם הסדר המילוני (יחס זה הוגדר בתרגיל בית 6, תרגיל 5) היא קבוצה סדורה היטב (קבוצה סדורה ליניארית שבכל תת-קבוצה לא ריקה שלה יש איבר קטן ביותר).

<u>**פתרון**</u>:

$(\mathbb{N},\le)$ קס"ל, לכן $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_l)$ קס"ל (לפי הגדרת היחס המילוני).

ניקח $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. נוכיח כי ב- A יש איבר קטן ביותר ביחס לסדר מילוני.

$(x_0,y_0)\in A$ נקרא איבר קטן ביותר אם לכל $(x,y)\in A$ מתקיים $(x_0,y_0)\le_l (x,y)$. לפי הגדרת סדר מילוני כדי ש- $(x_0,y_0)\le_l (x,y)$ או ש- $x_0 \le x$ או ש- ($x_0 = x$ וגם $y_0 \le y$) ביחס לסדר רגיל. כיוון ש- $x_0,y_0,x,y\in\mathbb{N}$ אז ביחס לסדר רגיל זה תמיד מתקיים כי $(\mathbb{N},\le)$ קס"ה.

לכן גם $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_l)$ קס"ה.

9. תהי $(X,\le)$ קס"ח כך שלכל קבוצה חלקית לא ריקה עם חסם מלעיל יש גם חסם עליון. הוכיחו כי לכל קבוצה חלקית לא ריקה עם חסם מלרע יש גם חסם תחתון.

<u>**פתרון**</u>:

תהי $\varnothing \neq A \subseteq X$ קבוצה חלקית של X עם חסם מלרע. נגדיר קבוצה $B=\{x\in X \mid x\le a, \forall a\in A\}$ - קבוצת חסמי מלרע של A. $B\neq\varnothing$ כי ל- A יש חסם מלרע.לפי הגדרה של B וגם לפי הנתון ל- B יש חסם עליון - x_0.

x_0 - חסם עליון של B, לכן הוא איבר קטן ביותר (איבר ראשון) בקבוצת כל החסמים מלעיל של B.

בנוסף, כיוון שכל $a\in A$ הוא חסם מלעיל ל- B (לפי ההגדרה של B) מתקיים $x_0\le a$, $\forall a\in A$. לכן x_0 חסם מלרע של A. מכאן - $x_0\in B$ ולכן x_0 הוא איבר אחרון (הגדול ביותר) של קבוצת החסמים מלרע של A, כלומר x_0 הוא חסם תחתון של A.

10. נתונה הקבוצה $A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(2,1),(2,6),(3,1),(3,2),(3,6)\}$. נגדיר יחס $\le_*$ ע"י: $(x,y)\le_*(z,w)\Leftrightarrow x\mid z\wedge y\le w$.

א. הראו $(A,\le_*)$ קס"ח.

ב. מצאו איברים מינימאליים, מקסימאליים, קטן ביותר, גדול ביותר (אם קיימים).

ג. תהי A $B=\{(1,2),(1,3),(1,6),(3,2)\}\subset A$ יחד עם היחס $\le_*$. קבעו $\sup(B),\ \inf(B)$.

<u>פתרון</u>:

א. יש להראות רפלקסיביות, אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות של היחס. מיידי לפי הגדרה של היחס.

ב. <u>איבר מקסימאלי</u>: $(3,6),(2,6)$; <u>איבר הגדול ביותר</u>: לא קיים, <u>איבר מינימאלי</u>: $(1,1)$, <u>איבר הקטן ביותר</u>: $(1,1)$.

ג. $\sup(B)=(3,6),\quad \inf(B)=(1,2)$.

<u>בהצלחה!</u>