זהבית צבי

פתרון תרגיל בית 5 פונקציות מרוכבות– נוסחת קושי לנגזרות, משפט ליוביל

שאלה 1

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$

פתרון

לפי נוסחת קושי לנגזרות

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow \int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{2\pi i}{n!}\,f^{(n)}(z_0)$$

עבור $f(z)=e^{2z}\ ,\ z_0=-1\,,\ n=3$ נקבל

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz=\frac{2\pi i}{3!}\,f^{(3)}(-1)$$

נגזור 3 פעמים:

$$f'(z)=2e^{2z}\ ,\ f''(z)=4e^{2z}\ ,\ f^{(3)}(z)=8e^{2z}$$

לכן

$$f^{(3)}(-1)=8e^{-2}$$

בסופו של דבר התשובה הסופית

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz=\underbrace{\frac{2\pi i}{3!}}_{=6}\cdot 8e^{-2}=\frac{8\pi i}{3e^2}$$

ב. $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\cos\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$

פתרון

לפונקצי'ה יש 2 נקודות בעיתיות (סינגולריות), ± 1, אבל רק הנקודה הסינגולרית $z_0=1$ נמצאת בתחום $|z-1|\le 1$.

נשתמש בנוסחת קושי לנגזרות

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow \int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{2\pi i}{n!}\,f^{(n)}(z_0)$$

עבור $z_0=1\,,\ n=1$ נגדיר $f(z)=\frac{\cos\pi z}{(z+1)^2}$ כאשר $f(z)$ אנליטית בעיגול הסגור $|z-1|\le 1$, ונקבל

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz = \underbrace{\frac{2\pi i}{1!}}_{=2\pi i} f'(1)$$

נחשב:

$$f'(z) = \frac{\sin(\pi z)\cdot \pi \cdot (z+1)^2 - \cos(\pi z)\cdot 2(z+1)}{(z+1)^4} = \frac{\pi \sin(\pi z)(z+1) - 2\cos(\pi z)}{(z+1)^3}$$

נציב $z_0 = 1$

$$f'(1) = \frac{\cancel{\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \cdot 2} - 2\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}}{2^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

בסופו של דבר התשובה הסופית

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

<u>שאלה 2</u>

תהי $f(z)$ פונקצי'ה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם לכל z מתקי'ים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה

<u>**פתרון**</u>

הטענה לא נכונה.
דוגמא נגדית: $f(z) = z^4$.
נבדוק שאכן מתקי'ים השוויון $f(z) = f(iz)$. נחשב את

$$f(iz) = (iz)^4 = \underbrace{i^4}_{=1} \cdot z^4 = z^4$$

מכאן השוויון.

ב. אם לכל z מתקי'ים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה

<u>**פתרון**</u>

נוכיח את הטענה באמצעות משפט ליוביל.
כיצד נראה חסימות?
נתון כי f שלמה, בפרט היא רציפה $\mathbb{C}$ ולכן גם רציפה בכל תת קבוצה של $\mathbb{C}$, למשל בעיגול היחידה הסגור $|z| \le 1$. עיגול היחידה הסגור הוא קבוצה קומפקטית, לכן לפי משפט ויירשטראס f חסומה ב-$|z| \le 1$, כלומר קי'ים $M > 0$ כך שלכל z המקי'ים $|z| \le 1$ מתקי'ים $|f(z)| \le M$.

אבל לכל $z \in \mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש-$\left|\frac{z}{3^n}\right| \le 1$ ואז

$$\left|f(z)\right| = \left|f\left(\frac{z}{3}\right)\right| = \left|f\left(\frac{z}{3^2}\right)\right| = \ldots = \left|f\left(\frac{z}{3^n}\right)\right| \le M$$

ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

<u>שאלה 3</u>

תהי $f(z)$ פונקצי'ה שלמה המקי'ימת $\left|f(z) - f(2z)\right| \le 10$. הוכיחו כי f קבועה.

<u>פתרון</u>

נגדיר את הפונקצי'ה $g(z) = f(z) - f(2z)$. נתון $f(z)$ שלמה, לכן גם $g(z)$ שלמה כהרכבה והפרש של פונקציות שלמות.

בנוסף נתון כי $g(z)$ חסומה. לכן לפי משפט ליוביל $g(z)$ קבועה. כלומר קי'ים $c \in \mathbb{C}$ כך שלכל z מתקי'ים

$$g(z) = f(z) - f(2z) = c$$

נציב $z = 0$ ונקבל

$$g(0) = f(0) - f(0) = c \Rightarrow c = 0$$

לכן $f(z) = f(2z)$ לכל z.

מכאן מוכיחים ש- f קבועה לפי שאלה 2 סעיף ב'.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו כי לא קי'ימת פונקצי'ה שלמה f המקי'ימת $\left|f(z)\right| = e^{|z|} - |z| - \frac{1}{2}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקצי'ה $g(t) = e^t - t - \frac{1}{2}$ כאשר $t = |z| \ge 0$ ממשי ונקבל

$g(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ו-$g'(t) = e^t - 1 \ge 0$ לכל $t \ge 0$ ולכן g פונקצי'ה מונוטונית עולה ולכן $g(t) \ge g(0) = \frac{1}{2}$.

מכאן נקבל ש-$\frac{1}{2} \le |f(z)| = g(t)$ לכל $z \in \mathbb{C}$, לכן הפונקצי'ה $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ היא פונקצי'ה

שלמה כמנה של פונקציות שלמות. כמו כן $f(z) \neq 0$ לא מתאפסת כי ידוע

ש-$\frac{1}{2} \geq |f(z)|$. כמו כן $h(z)$ חסומה כיוון ש- $\left|h(z)\right| = \frac{1}{\left|f(z)\right|} \leq 2$. לכן h קבועה ולכן גם f קבועה.

אבל זה לא יתכן כי $\left|f(0)\right| = \frac{1}{2}$ ו-$\frac{1}{2} \neq e - \frac{3}{2} = |f(1)|$ סתירה.

<u>שאלה 5</u>

נניח ש- $f = u + iv$ היא פונקצי'ה שלמה. הוכיחו ש- f קבועה בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $u(z) \geq 0$

<u>פתרון</u>

נניח $u(z) \geq 0$ לכל z מרוכב.

נגדיר את הפונקצי'ה $g(z) = e^{-f(z)}$, אז

$$\left|g(z)\right| = \left|e^{-f(z)}\right| = \left|e^{-u(z)-iv(z)}\right| = \left|e^{-u(z)}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-iv(z)}\right|}_{=1} = e^{-u(z)} \underset{(*)}{\leq} 1$$

(*) מכיוון שאקספוננט ממשי הוא פונקציה עולה ומהנתון $u(z) \geq 0 \Rightarrow -u(z) \leq 0$ נקבל:

$$\left|g(z)\right| = e^{-u} \leq e^{0} = 1$$

כיוון ש-$g(z)$ היא פונקציה שלמה כהרכבה של פונקציות שלמות וכיוון שהיא גם חסומה, נובע ממשפט ליוביל שהיא קבועה.

לכן

$$0 = g'(z) = -e^{-f(z)} f'(z)$$

כיוון ש- $e^{-f(z)} \neq 0$ נובע ש- $f'(z) = 0$ ולכן f קבועה.

ב. $u(z) \geq v(z)$

<u>פתרון</u>

נגדיר את הפונקצי'ה $g(z) = (1+i) f(z)$, אז

$$g(z) = (1+i)\left(u(z) + iv(z)\right) = u(z) + iv(z) + iu(z) - v(z) = u(z) - v(z) + i\left(u(z) + v(z)\right)$$

מהנתון ש-$u(z) \geq v(z) \Rightarrow u(z) - v(z) \geq 0$ נובע כי החלק הממשי של $g(z)$ גדול או שווה לאפס לכל z מרוכב ולכן לפי סעיף א' נקבל ש- $g(z)$ קבועה. לכן נקבל שגם f קבועה.

ג. $u(z)v(z)\geq 0$

<u>פתרון</u>

נגדיר את הפונקצי'ה $g(z)=-i\cdot f^2(z)$, אז

$$g(z)=-i\cdot f^2(z)=-i\cdot\left(u(z)+iv(z)\right)^2=-i\cdot\left(u^2(z)+2iu(z)v(z)-v^2(z)\right)=2u(z)v(z)-i\left(u^2(z)-v^2(z)\right)$$

מהנתון $u(z)v(z)\geq 0$ נובע כי החלק הממשי של g גדול או שווה לאפס ולכן שוב מסעיף א' נובע ש- g קבועה. לכן נקבל שגם f קבועה.

<u>שאלה 6</u>

תהי $f(z)$ פונקצי'ה שלמה המקי'ימת

$$\lim_{z\to\infty}\sup\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leq 1$$

הוכיחו שבהכרח f היא פונקצי'ה לינארית מהצורה $az+b$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$.

<u>הדרכה</u>: משפט ליוביל ומשפט קושי לנגזרות.

<u>פתרון</u>

נוכיח שלכל $z_0\in\mathbb{C}$ מתקי'ים

$$\lim_{z\to\infty}\sup\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\leq 1$$

אכן, נחשב:

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{z}{z-z_0}\right|=\lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{1-\frac{z_0}{z}}\right|=\frac{1}{1-0}=1$$

נקבל

$$\lim_{z\to\infty}\sup\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|=\lim_{z\to\infty}\sup\left(\left|\frac{f(z)}{z}\right|\cdot\left|\frac{z}{z-z_0}\right|\right)\leq\lim_{z\to\infty}\sup\left|\frac{f(z)}{z}\right|\cdot\underbrace{\lim_{z\to\infty}\sup\left|\frac{z}{z-z_0}\right|}_{=1}\leq 1$$

כעת, לפי נוסחת קושי לנגזרות עם $n=1$ נקבל:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

כאשר $r>0$ מספר ממשי כלשהו.

נפעיל ערך מוחלט לשני האגפים, נשתמש בתכונות האינטגרל ובמשפט הערכת האינטגרל ונקבל:

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right||dz| \underset{|z-z_0|=r}{=} \frac{1}{2\pi r}\int_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right||dz|$$

$$\le \frac{1}{2\pi r}\cdot 2\pi r\cdot \underbrace{max}_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|$$

אם $|z-z_0|=r$ ו- $r\to\infty$ אז $|z|\to\infty$. לכן עבור r מספיק גדול מתקי'ים

$$\max_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\le 1$$

לכן קיבלנו ש-$|f'(z_0)|\le 1$ לכל $z_0\in\mathbb{C}$, כלומר f' חסומה.

נתון כי f שלמה, לכן מנוסחת קושי לנגזרות יש לה אינסוף נגזרות בכל $\mathbb{C}$, לכן גם f' שלמה.

בסה"כ f' שלמה וחסומה, לכן ממשפט ליוביל היא קבועה.

ז"א $f' = a \Leftarrow f(z)=az+b$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$.

<u>שאלה 7</u>

מצאו את כל הפונקציות השלמות המקי'ימות את אי השוויון

$$|f(x+iy)|\le e^x\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

<u>פתרון</u>

נסמן $z=x+iy\ ,\ x,y\in\mathbb{R}$.

לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקי'ים $|e^z|=|e^{x+iy}|=\underbrace{e^x}_{>0}\cdot\underbrace{|e^{iy}|}_{=1}=e^x$.

נובע מהנתון ש-

$$|f(z)|\le|e^z|$$

נגדיר את הפונקצי'ה $g(z)=\frac{f(z)}{e^z}$, אז g היא פונקצי'ה שלמה כמנה של פונקציות שלמות והמכנה לא מתאפס באף נקודה.

כמו כן,

$$|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{e^z}\right|\le 1$$

קיבלנו ש- g שלמה וחסומה, וממשפט ליוביל היא קבועה ומכאן $f\left(z\right)=ce^{z}$.
כוון ש-$\left|g\left(z\right)\right|\le 1$ נקבל ש-$\left|c\right|\le 1$.