1) נזכיר שטרנספורמציות הפיכות של $\hat{z}$. אזי

$\phi_i(z)=\frac{a_i z+b_i}{c_i z+d_i}$, $i=1,2$ אז $\phi_1(\phi_2)=\frac{az+b}{cz+d}$ כאשר

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

כעת נשים לב כי $\phi_0(z)=\frac{1-z}{1+z}$

מעתיקה את ציר המדומה לחצי המישור הימני. לכן $\phi(\phi_0(z))$

(I) $\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ מעתיקה את חצי המישור הימני לעצמו אמ"מ

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a-b-c+d & -a-b+c+d \\ -a+b-c+d & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

לכן, לפי הפיכות של 2) נקבל

$$|(\bar b-\bar d)(a+c)+(\bar a-\bar c)(b+d)|+2|ad-bc|$$

$$\leq(a+c)(\bar b+\bar d)+(\bar a+\bar c)(b+d)$$

3) נניח $\lambda=\frac{zw+1}{z-w}$ אז $z=\frac{\lambda w+1}{\lambda-w}$

כי המספר z ממשי אמ"מ

$$\frac{\lambda w+1}{\lambda-w}=\frac{\bar\lambda\bar w+1}{\bar\lambda-\bar w}$$

אז

$$|\lambda|^2-\lambda\bar\alpha-\bar\lambda\alpha+1=0$$

עם

$$\alpha=\frac{|w|^2+1}{\bar w-w}$$

ולכן $|\lambda-\alpha|^2=|\alpha|^2-1$

מכאן ש $|\alpha|^2-1=\left(\frac{|w^2+1|}{|w-\bar w|}\right)^2$

וקיבלנו מעגל עם מרכז α ורדיוס $\frac{|w^2+1|}{|w-\bar w|}$

ב) נמצא באופן כללי את העתק מהצורה $\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$

נשים לב כי $z=\frac{wd-b}{a-cw}$

עכשיו

$$|z|<1 \iff |z|^2<1$$

$$\iff |wd-b|^2<|a-wc|^2$$

$$\iff |w|^2(|d|^2-|c|^2)-2\mathrm{Re}\{(\bar b d-\bar a c)w\}+|b|^2-|a|^2<0 \quad (I)$$

כעת נשים לב כי $|c|<|d|$. אם $|c|=|d|$ הקבוצה
המתקבלת במשוואה (I) לא חסומה. אם $|c|>|d|$
הנקודה $-\frac{d}{c}$ היא ב-$\mathbb{D}$ (תוך היחידה) ונקבל כי ל-$\varphi(z)$
יש קוטב שם בסתירה לכך שהיא מוגדרת ב-$\mathbb{D}$. לכן $|d|>|c|$
ונחלק ב-$\cancel{|c|-|d|}$ $|d|-|c|$ ב-(I) ונקבל

$$\underbrace{\left|w-\frac{\bar b d-a\bar c}{|d|^2-|c|^2}\right|^2}_{w_0}<\underbrace{\frac{|ad-bc|^2}{(|d|^2-|c|^2)^2}}_{r_0^2}$$

לכן נדרוש כי $|w_0|+r_0\le 1$

$$\frac{|\bar b d-\bar a c|}{|d|^2-|c|^2}+\cancel{\frac{|ad-bc|}{|d|^2-|c|^2}}\le 1$$

//

4) נסמן $w = \frac{z-3}{1-2z}$ אז $z = \frac{w+3}{1+2w}$.

$|z-1| = k$ הוכן / כ.ו. —

$\left|\frac{w+3}{1+2w} - 1\right| = k$

נקבל

$|w+3-(1+2w)| = k|1+2w|$

אז

$|2-w| = 2k|w+\frac{1}{2}|$

ואכן עבור ישר נקבל $k = \frac{1}{2}$. כנדרש. כ. ___ ה.ו.

$|2-w| = |w+\frac{1}{2}| \Rightarrow x = \frac{3}{4}$