תרגיל 4

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

   (א) d_5.

   (ב) d_7.

   (ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

   (ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x,y) = |x-y|$).

   פתרון:

   לפי d_5 הסדרה 5^n מתכנסת ל 0 אבל זה לא נכון לפי שאר המטריקות ולכן d_5 לא שקולה לאחרות. כנ"ל d_7. שתי המטריקות האחרונות דווקא כן שקולות. במטריקה $0-1$ כל נקודה היא קבוצה פתוחה (כי היא כדור ברדיוס חצי סביב הנקודה) ולכן כל קבוצה היא פתוחה (בתור איחוד פתוחות). בדומה גם לפי המטריקה הסטנדרטית, לכל $n \in \mathbb{Z}$ הקבוצה $\{n\}$ היא קבוצה פתוחה כי היא הכדור הפתוח

$$B(n, \frac{1}{2})$$

   ולכן כל קבוצה היא פתוחה כאיחוד של פתוחות.

2. נגדיר את S להיות קבוצת הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט, כלומר

$$S = \{a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

   נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$d(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$\rho(a_n, b_n) = \sup\{|a_n - b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   האם המטריקות שקולות? הוכיחו.

   פתרון:

לא. ניקח את הסדרה

$$a_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$$

$$a_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots)$$

ובאופן כללי

$$a_n = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$$

קל לראות שלפי מטריקה ρ מתקיים $a_n \to 0$ אבל לפי מטריקה d דווקא $d(a_n, 0) = 1$ לכל n. לכן המטריקות לא שקולות

3. יהי (X, d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho : X \to \mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

(א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.

פתרון:

קל לוודא ש $\rho(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$ וקל לוודא סימטריות. לגבי אי שוויון המשולש. צריך להוכיח

$$\min\{1, d(x, z)\} \leq \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(y, z)\}$$

נפצל לכמה מקרים

אפשרות א':

$$\min\{1, d(x, z)\} = 1$$

ואז אם בצד ימין אחד המינימומים הוא 1 אז האי שוויון מיידי. אחרת

$$1 \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

כנדרש.

אפשרות ב':

$$\min\{1, d(x, z)\} = d(x, z)$$

כלומר

$$d(x, z) \leq 1$$

שוב אם בצד ימין אחד המינימומים הוא 1 אז האי שוויון מיידי. אחרת זה פשוט אי שוויון המשולש.

(ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.
פתרון:
נוכיח לפי התכנסות סדרות. נניח ש $x_n \to x$ לפי d כלומר $d(x_n, x) \to 0$. אז בוודאי החל משלב מסוים

$$d(x_n, x) \leq 1$$

ולכן

$$\rho(x_n, x) = \min\{1, d(x_n, x)\} \to 0$$

מצד שני אם $x_n \to x$ לפי ρ, כלומר

$$\min\{1, d(x_n, x)\} \to 0$$

אז בהכרח מתקיים שהחל משלב מסוים

$$\min\{1, d(x_n, x)\} \leq \frac{1}{2}$$

ולכן

$$d(x_n, x) \leq 1$$

כלומר החל משלב מסוים

$$d(x_n, x) = \rho(x_n, x)$$

ולכן

$$d(x_n, x) \to 0$$

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.
פתרון:
ρ אכן חסומה על ידי 1

4. יהיו d_1, d_2 מטריקות שקולות על X, ו ρ_1, ρ_2 מטריקות שקולות על Y. נניח ש $f : (X, d_1) \to (Y, \rho_1)$ רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f : (X, d_2) \to (Y, \rho_2)$ רציפה.

פתרון:
הוכחה: תהי O קבוצה פתוחה ב(Y, ρ_2). מכיוון ש $\rho_1 \sim \rho_2$ נקבל ש O פתוחה ב(Y, ρ_1). $f : (X, d_1) \to (Y, \rho_1)$ רציפה, ולכן $f^{-1}(O)$ פתוח ב(X, d_1). אבל $d_1 \sim d_2$, אז $f^{-1}(O)$ פתוח גם ב(X, d_2). מסקנה:$f : (X, d_2) \to (Y, \rho_2)$ רציפה.

5. הוכיחו: תהי A קבוצה במרחב מטרי. A סגורה אמ"ם $A' \subseteq A$.
פתרון:
$\Longleftarrow$: נניח שA סגורה. יהי $x \in A'$.תהי $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ כך ש $x_n \to x$. מכיוון שA סגורה היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה. כלומר, $x \in A$.

$\Longleftarrow$: נניח ש $A' \subseteq A$. נניח בשלילה שA לא סגורה. אז יש סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ כך ש $x_n \to x$, אבל $x \notin A$. זה אומר ש $x_n \in A \setminus \{x\}$. כלומר, $x \in A'$ ולכן $x \in A$. סתירה.

6. תהי S קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
א. $x \in S \setminus S'$.
ב. קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.
פתרון:
א$\Longleftarrow$ב: $x \in S \setminus S'$, זה אומר שקיים $\epsilon > 0$ כך ש $(B(x,\epsilon) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. מנגד, $x \in S \cap B(x,\epsilon)$, ולכן $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.
ב $\Longleftarrow$ג: תהי $S \supseteq \{x_n\} \to x$. עבור ה$\epsilon$ מסעיף א', החל ממקום מסויים מתקיים $x_n \in B(x,\epsilon)$. לכן $x_n = x$.
ג $\Longleftarrow$א: נניח בשלילה ש$x \in S'$. זה אומר שיש סדרה בS שכל איבריה שונים ומתכנסת לx. בפרט, הסדרה הזאת לא קבועה לבסוף. סתירה.

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי. נסמן $A = \{x_n\}$. ניח ש $x_n \to x$ עבור $x \notin A$.
א. חשבו את A', A''. כאשר $(A'') = (A')'$.
ב. האם A קומפקטי?
ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? (ענו רק באמצעות הגדרת הקומפקטיות, דרך כיסויים פתוחים).
פתרון:
א. $A' = \{x\}$, $A'' = \emptyset$.
הסבר: x הוא גבול של סדרה לא קבועה לבסוף בA. וכל סדרה בA היא בעצם תת סדרה של $\{x_n\}$, ולכן מתכנסת לx. כלומר, x הוא נקודת ההצטברות היחידה.
כמו כן, הוכחנו בכיתה שלקבוצה סופית אין נקודות הצטברות.
ב. הוכחתם בהרצאה שכל מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם. A היא לא קבוצה שלמה, כי יש בה סדרה שהגבול שלה לא נמצא בA, ולכן A לא קומפקטית.
ג. יהי $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של $A \cup \{x\}$. בפרט, יש i כך ש $x \in O_i$. $\{x_n\} \to x$, ולכן יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים ש$x_n \in O_i$. בנוסף, לכל $1 \le j \le n_0$ יש O_j כך ש $x_j \in O_j$. אז קיבלנו ש $\{O_1, O_2, ..., O_{n_0}, O_i\}$ הוא תת כיסוי סופי של $A \cup \{x\}$. לכן $A \cup \{x\}$ היא קבוצה קומפקטית.

8. יהי X מרחב מטרי ותהי A קבוצה בת מנייה, כך שלכל שתי נקודות שונות בA מתקיים $1 \le d(a,b) \le 2$.
א. הוכיחו שA סגורה וחסומה.
ב. האם A קומפקטית?
פתרון:
א. ברור שA חסום, לפי ההגדרה. נראה שהוא סגור. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה מתכנסת, $x_n \to x$. בפרט, זאת סדרת קושי. זה אומר שעבור $\epsilon = \frac{1}{2}$, יש n_0 כך שלכם $n, m > n_0$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$. אבל מהנתון על המרחקים בקבוצה זה אומר ש $x_n = x_m$. כלומר, הסדרה קבועה לבסוף, ובפרט, $x \in A$.
ב. לא. נקח את הכיסוי הפתוח הבא: $\{B(x,\frac{1}{2}) : \forall x \in A\}$. ברור שזה כיסוי פתוח, ובנוסף, $\forall x \in A : B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$. מכיוון ש$A$ בת מנייה, זהו לא כיסוי סופי. אבל לא

קיים לו שום תת כיסוי אמיתי. (כי אם נוריד כדור $B(x,\frac{1}{2})$, אז x לא ישתתף בכיסוי).

9. הוכיחו/הפריכו:

א. $(A_1\cup ... \cup A_n')=A_1'\cup ... \cup A_n'$.

ב. $\bigcup A_i'=(\bigcup A_i)'$.

פתרון:

א. הוכחה:

ברור שאם $B\subseteq A$ אז $B'\subseteq A'$, ולכן $(A_i\cup ... \cup A_n)\subseteq A_i$ גורר ש $A_i'\subseteq (A_1\cup ... \cup A_n)'$, שגורר ש $(A_1',..., A_n)'\subseteq (A_1'\cup ... \cup A_n')$.

מצד שני, נניח ש$x\in (A_1\cup ... \cup A_n)'$. כלומר, יש סדרה שכל איבריה שונים $x \leftarrow \{x_n\}\subseteq A_1\cup ... \cup A_n$. מעיקרון שובך היונים, יש $1\leq i\leq n$ כך שאינסוף מאיברי הסדרה נמצאים בA_i. זאת תת סדרה, שגם שואפת לx ולכן $x\in A_i'$, כלומר, $x\in A_1'\cup ... \cup A_n'$.

ב. הפרכה: נקח $A_n=\{\frac{1}{n}\}$, תת קבוצה של $\mathbb{R}$. אז, לכל n, $A_n'=\emptyset$, ולכן $\bigcup A_n'=\emptyset$.

אולם, $\bigcup A_n=\{\frac{1}{n}:\forall n\in\mathbb{N}\}$, ולכן $(\bigcup A_n)'=\{0\}$.