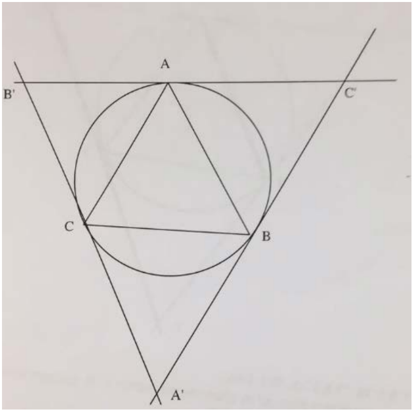
גיאומטריה אוקלידית – פתרון תרגיל 6

שאלה 1

נתבונן באיור הבא:



הוכיחו: AA', BB', CC' קונקורנטים.

הוכחה

נפעיל את משפט צ'בה ל-$\Delta A'B'C'$:

על-מנת ש-AA', BB', CC' יהיו קונקורנטים צריך להתקיים:

$$\frac{B'C}{CA'} \cdot \frac{A'B}{BC'} \cdot \frac{C'A}{AB'} = 1 \ (*)$$

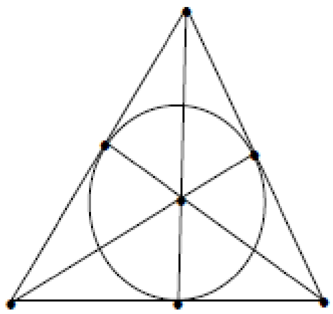
כיוון ש-$C'B'$, $A'B'$ ו-$C'A'$ משיקים – שני משיקים למעגל שיוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה

ולכן $\begin{cases} B'A = B'C \\ C'A = C'B \\ A'B = A'C \end{cases}$.

נציב את השוויונות ב-$(*)$ ונקבל 1 $\Leftarrow$ AA', BB', CC' קונקורנטים.

שאלה 2

מעגל γ משיק לצלעות המשולש ΔABC מבפנים. תהי D נקודת ההשקה על BC, E נקודת ההשקה על CA ו- F נקודת ההשקה על AB. בעזרת משפט צ'בה הוכיחו ש- AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת.



הוכחה

בכדי להראות כי AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, עלינו להוכיח לפי משפט צ'בה כי מתקים:

$$(*)\quad \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 .$$

שני משיקים היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל שווים ולכן: $\begin{cases} AF=EA \\ FB=BD \\ DC=CE \end{cases}$.

נציב ב-(*) ונקבל: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\underbrace{\frac{AF}{EA}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{BD}{FB}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{CE}{DC}}_{=1}=1$.

הוכחנו שהיחס הדרוש במשפט צב'ה שווה אחד ולכן AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, כלומר קונקורנטים.

שאלה 3

הוכיחו כי הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה

נתבונן ב- $\triangle ABC$ ונניח AD גובה ל BC, BE גובה ל AC ו- CF גובה ל AB, כלומר

$\begin{cases} AD\perp BC \\ BE\perp AC \\ CF\perp AB \end{cases}$. צריך להוכיח ששלושת הגבהים הנ"ל הם קונקורנטים, כלומר נפגשים בנקודה אחת.

נשתמש במשפט צ'בה.

תחילה, לפי: זוית $\sphericalangle B$ משותפת

ו- $\sphericalangle CFB=\sphericalangle ADB=90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle CFB\sim\triangle ADB$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{FB}{BD}=\frac{CF}{AD}$.

כעת, זוית $\sphericalangle C$ משותפת

ו- $\measuredangle BEC = \measuredangle ADC = 90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{AD}{BE} = \frac{DC}{CE}$.

וגם זוית $\measuredangle A$ משותפת

ו- $\measuredangle BEA = \measuredangle AFC = 90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle BEA \sim \triangle AFC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{BE}{CF} = \frac{EA}{AF}$.

נכפול את היחסים שקיבלנו ונקבל:

$$\frac{FB}{BD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EA}{AF} = \frac{CF}{AD} \cdot \frac{AD}{BE} \cdot \frac{BE}{CF} = 1$$

ומכאן לפי משפט צ'בה מקבלים כי הגבהים AD, BE ו- CF קונקורנטים.

<u>שאלה 4</u>

המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נוגע בצלעות BC, CA, AB בנקודות X, Y, Z בהתאמה.

המשך הקטע YZ פוגש את המשך הצלע BC בנקודה K.

הוכיחו: $\frac{BK}{KC} = -\frac{BX}{XC}$

<u>הוכחה</u>

לפי הבניה, הנקודות K, Z, Y קוליניאריות והישר העובר דרכן חותך את הצלעות/המשכי הצלעות ב- $\triangle ABC$. לכן נשתמש במשפט מנלאוס: $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$.

נעשה בניה: צ'ביאנים AX, BY ו- ZC. הצ'ביאנים נפגשים בנקודה אחת מכיוון שהם חוצי הזויות במשולש, ונקודת הפגישה היא מרכז המעגל החסום. לפי משפט צ'בה נקבל:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

שתי מנות זהות לכן נבודד: $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{CY}{YA} = -\frac{KC}{BK}$.

נציב במשוואה של צ'בה:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \left(-\frac{KC}{BK}\right) = 1 \Rightarrow \frac{BX}{XC} = -\frac{BK}{KC}$$