בס"ד

תרגול מס' 4 בחשבון אינפי' 2

תכונות של האינטגרל המסוים

משפט: אם $g(x)\le f(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אזי: $\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$.

תרגיל: הוכח: $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

פתרון: e^{x^2-x} היא פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,2]$ ולכן מחזירה – עפ"י ווירשטראס 2 – מינימום ומקסימום בקטע. נמצא אותם ע"י גזירה ואיפוס וע"י הסתכלות בקצות הקטע ונקבל: $m=e^{-1/4},\ M=e^2$. כעת נעזר בעובדה שהפונקציה e^{x^2-x} כפונקציה אלמנטארית היא רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע $[0,2]$ ולכן נוכל להשתמש במשפט האחרון. כלומר נבצע אינטגרציה לאורך הקטע על שני הקבועים שקיבלנו, ונגיע להוכחה.

תרגיל: הוכח: $0\le\int_0^x e^{-t^2}dt\le\arctan x$.

פתרון: למעשה יש להוכיח שני אי-שיוויונים. השמאלי הוא טריוויאלי שכן אינטגרל של ערכים חיובים הוא אי שלילי. לגבי אי-השיוויון הימני, נעזר בכך ש: $\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$ ובעובדה כי הפונקציות: $e^{-t^2},\ \frac{1}{1+t^2}$ הן אינטגרביליות בכל קטע $[0,x]$ ולכן מתוך המשפט מספיק להוכיח כי: $\forall t>0:\ e^{-t^2}\le\frac{1}{1+t^2}$.

זה שקול להוכחת האי-שיוויון: $\forall t>0:\ e^{t^2}\ge 1+t^2$ או להוכחת: $\forall t>0:\ e^{t^2}-t^2-1\ge 0$.

נגזור ונאפס למציאת נקודת הקיצון של הביטוי באגף שמאל: $2te^{t^2}-2t=0\ \rightarrow\ t=0$.

הביטוי הוא פונקציה מונוטונית עולה עבור $t\ge 0$ ולכן $t=0$ היא נקודת מינימום בה הוא מתאפס, ומשם הוא רק חיובי. כלומר: $\forall t>0:\ e^{t^2}\ge 1+t^2$.

מסקנה מהמשפט: תהא $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $[a,b]$ (ולכן אינטגרבילית בו). מתקיים:

$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]:$. אזי: $m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a)$

ומכאן: $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

מתוך משפט ערך הביניים של קושי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ בה: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

לערך זה קוראים **הערך הממוצע של** $f\left(x\right)$ **בקטע** $[a,b]$.

תרגיל: חשב את הערך הממוצע של $\sin x\sin(x+\theta)$ בקטע $[0,2\pi]$.

פתרון: נעזר בזהות: $\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$ ונקבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\theta)\cdot dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta-\cos(2x+\theta)\right]\cdot dx$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot dx-\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2x+\theta)\cdot dx}_{=0}\right]=\frac{2\pi\cos\theta}{4\pi}=\frac{\cos\theta}{2}.$$

המשפט היותר כללי הוא הבא:

משפט ערך הממוצע האינטגראלי: תהא $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $\left[a,b\right]$ ותהא $g\left(x\right)$ פונקציה אינטגרבילית אחרת אי-שלילית בו. אז קיימת נקודה $c\in\left[a.b\right]$ בה מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(c\right)\int_a^b g\left(x\right)dx .$$

אכן, אם נציב $g\left(x\right)=1$ נקבל את המקרה הקודם בו: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

תרגיל (תש"ע מועד א'): הראה כי: $\frac{1}{2}\ln 2 \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan x\,dx \le \frac{1}{2e}\ln 2$.

פתרון: עפ"י משפט ערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $0<c<\frac{\pi}{4}$ בה מתקיים:

$$\int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan x\,dx = e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx$$

לגבי האינטגרל שנותר: $\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx$ נציב: $t=\cos x$ ונקבל: $dt=-\sin x dx$, $t:1\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}$

ולפיכך: $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_1^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{dt}{t}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$.

כמו כן נרשום: $0<c<\frac{\pi}{4}<1 \;\Rightarrow\; 0<c^2<1 \;\Rightarrow\; 1<e^{c^2}<e \;\Rightarrow\; \frac{1}{e}<e^{-c^2}<1$.

כעת אם נכפיל את שתי התוצאות שקיבלנו נקבל את התוצאה המבוקשת.

המשפט היסודי של החדו"א:

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אזי $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ היא פונקציה קדומה שלה.

תרגיל: הראה כי לפונקציה: $F(x)=\int_{1/2}^{x}e^{t^2}\left(t^2-1\right)dt$ יש מינימום מקומי ב- $x=1$.

פתרון: כיוון ש- $e^{t^2}\left(t^2-1\right)$ <u>רציפה</u> בכל קטע, עפ"י המשפט היסודי של החדו"א $F(x)$ היא פונקציה קדומה שלה. כלומר: $F'(x)=e^{x^2}(x+1)(x-1)$. קל לראות כי F' מחליפה סימן ב- $x=1$ כלומר זו נקודת קיצון מקומי. לגבי העובדה שזהו מינימום, אפשר לגזור שוב, להציב $x=1$ ולקבל ערך חיובי.

תרגיל: מצא נקודות קיצון מינימום מקומי של הפונקציה: $\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$ בקטע $(0,\infty)$.

פתרון: נתייחס אל האינטגרל כפונקציה מורכבת $(f\circ g)(x)$ באשר: $g(x)=x^2,\quad f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

עפ"י המשפט היסודי של החדו"א וכלל השרשרת: $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin\left(x^2\right)}{x}$.

אם נשווה לאפס נקבל: $x=\sqrt{n\pi},n\in\mathbb{N}$.

אם בנוסף נדרוש שהנגזרת השנייה תהיה חיובית (מינימום מקומי), נקבל: $x=\sqrt{n\pi},n\in 2\mathbb{N}$.

נוסחת ניוטון לייבניץ:

אם f רציפה ב-$[a,b]$ ו- $\phi(x)$ פונק' קדומה שלה אז: $\int_a^b f(x)dx = \phi(b)-\phi(a)$.

דוגמה: חשב את גבול הסדרה: $S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

פתרון: נכתוב: $S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+i/n}$ ונשים לב שקיבלנו את סכום רימן עבור הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{1+x}$ בקטע $[0,1]$ עם סדרת החלוקות הנורמאלית $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ בה בכל T_n אנו מחלקים את הקטע לקטעים שווים באורך $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ כ"א, ובוחרים את הנקודות: $\alpha_i = \frac{i}{n}\in\Delta x_i$.

כיוון ש- f היא רציפה ב-$[0,1]$ היא אינטגרבילית שם, ובפרט סכום רימן הזה שואף לאינטגרל המסוים:

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+i/n}}_{f(\alpha_i)} = I = \int_0^1\frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

באופן יותר כללי, אם: $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ אז מתוך כלל השרשרת נקבל:

$$F'(x) = f\left(\beta(x)\right)\cdot\beta'(x) - f\left(\alpha(x)\right)\cdot\alpha'(x)$$

תרגיל: חשב את הגבול: $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$.

פתרון: כיוון שהאינטרוול במונה שואף לאפס והפונקציה חסומה שם, המונה שואף לאפס. ניעזר בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}\underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{t}\Big|_0^{x^2}\cdot 2x}{3x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\cdot 2x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$