<u>תרגיל 6 – אינפי 2</u>

<u>משפט</u>: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם"ם היא חסומה בקטע ולכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה T של $[a,b]$ עבורה מתקיים $\left|\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\right|<\varepsilon$

1.

a. הוכח/הפרך: אם פונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ פרט למספר סופי של נקודות היא אינטגרבילית בו.

b. תהי פונקציה f כך שיש לה פונקציה קדומה F בקטע $[a,b]$. הוכח/הפרך: f אינטגרבילית בקטע.

c. תהי $A\in[0,1]$ כך ש A אינסופית מעוצמה $\aleph_0$. ותהיי $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$. הוכח ש f אינה אינטגרבילית בקטע, או הבא דוגמא נגדית והוכח שהיא כן אינטגרבילית בקטע.

2. א.תהי f פונקציה רציפה ואי שלילית בקטע $[a,b]$ כך ש $\int_a^b f(x)dx=0$. הוכח ש f שווה זהותית לאפס בקטע.

ב. נניח f רציפה וכך שלכל פונקציה רציפה g מתקיים : $\int_a^{\mathrm{b}} f(x)g(x)dx=0$. הוכיחו כי f שווה זהותית לאפס בקטע.

3. (*) הוכח כי קיים גבול לסדרה $a_n=\sum_{i=1}^{2^n}\sin\frac{i}{2^{2n}}\cos\frac{i}{2^{2n}}\cos\frac{i}{2^{2n-1}}\cdots\cos\frac{i}{2^{n+1}}$. (רמז: הציגו את איברי הסידרה בצורה אחרת ...).

4. תהי $f=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & \frac{n-1}{n}\le x\le\frac{n}{n+1}\\ 1 & x=1\end{cases}$. האם f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$? הוכח.