אנליזה מתקדמת למורים תרגול 12

14 בינואר 2021

1 מד"ר לינארית מסדר שני - לא הומוגנית

כאן המד"ר היא מהצורה:

$$ay'' + by' + cy = q(x)$$

הפתרון נעשה בשני שלבים:

- מציאת הפתרון להומוגנית, מסומן y_h.
- מציאת פתרון פרטי, ע"י ניחוש פתרון מהצורה $y_p = f(x)$ כאשר f פולינום מאותה דרגה של q.

ואז הפתרון הכללי של המד"ר הוא:

$$y = y_h + y_p$$

תרגילים:

1. פתרו את המד"ר: $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2x + 2$
פתרון: שלב ראשון נפתור את ההומוגנית. הפולינום האופייני של ההומוגנית הוא $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ שפתרונותיו הם:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

ולכן פתרון להומוגנית:

$$y_h = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

שלב שני, נמצא פתרון פרטי מהצורה

$$y = ax^2 + bx + c$$

נקבל:

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

נציב במד"ר:

$$2a + 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x + 2$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ \underbrace{4a}_{2} + 2b = 2 \Rightarrow b = 0 \\ \underbrace{2a}_{1} + \underbrace{2b}_{0} + 2c = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

ובסה"כ פתרון המד"ר הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

2. פתרו את המד"ר: $y'' + 2y' + 2y = 2$
את הפתרון של ההומוגנית יש לנו מתרגיל קודם. נמצא פתרון פרטי מהצורה $y_p = c$.
הנגזרות מתאפסות, ונקבל:

$$2c = 2$$

$$c = 1$$

קיבלנו פתרון פרטי $y_p = 1$, ולכן פתרון המד"ר הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + 1$$

3. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = x^3 + 2x + 1$

פתרון: נמצא את הפתרון להומוגנית: הפולינום האופייני הוא:

$$\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2 = (\lambda - \sqrt{2})^2$$

כלומר:

$$\lambda = \sqrt{2}$$

שורש כפול. ולכן:

$$y_h = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 x e^{\sqrt{2}x}$$

נמצא פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

נגזרות:

$$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y_p'' = 6ax + 2b$$

נציב במד"ר:

$$6ax + 2b - 2\sqrt{2}(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 + 2x + 1$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 2a = 1 & \qquad a = \frac{1}{2} \\ -6\sqrt{2}a + 2b = 0 \\ 6a - 4\sqrt{2}b + 2c = 2 \\ 2b - 2\sqrt{2}c + 2d = 1 \end{cases}$$

נמצא את b בעזרת הצבה מהשוואה הראשונה:

$$-3\sqrt{2} + 2b = 0$$

$$b = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

נציב בשלישית:

$$3 - 12 + 2c = 2$$

$$c = 5.5$$

וברביעית:

$$3\sqrt{2} - 11\sqrt{2} + 2d = 1$$

$$d = \frac{1 + 8\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{2}$$

ולכן:

$$y_p = \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{\sqrt{2}} + 5.5x + \frac{1}{2} + 4\sqrt{2}$$

ופתרון המד"ר:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 x e^{\sqrt{2}x} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{\sqrt{2}} + 5.5x + \frac{1}{2} + 4\sqrt{2}$$

4. $y'' - 7y' + 12y = x - 3$
נתחיל מפתרון ההומוגנית: הפולינום האופייני הוא

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

ולכן:

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

כעת, נעבור לפתרון פרטי מהצורה

$$y_p = ax + b$$

נגזרות:

$$y' = a$$

$$y'' = 0$$

נציב במד"ר:

$$-7a + 12(ax + b) = x - 3$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 12a = 1 & a = \frac{1}{12} \\ -7a + 12b = -3 \end{cases}$$

נציב במשוואה השנייה:

$$-\frac{7}{12} + 12b = -3$$

$$12b = -\frac{29}{12}$$

$$b = -\frac{29}{144}$$

ולכן קיבלנו: $y_p = \frac{x}{12} - \frac{29}{144}$, ופתרון המד"ר:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} + \frac{x}{12} - \frac{29}{144}$$

5. פתרו את המד"ר מתרגיל קודם עם תנאי התחלה: $y(1) = 1, y(2) = 2$.

פתרון: הדגש הוא: קודם כל מוצאים פתרון כללי של המד"ר $y = y_h + y_p$ (מה שעשינו בתרגיל קודם), ורק אח"כ מציבים תנאי התחלה.
נציב את תנאי ההתחלה בפתרון הכללי שקיבלנו:

$$\begin{cases} 1 = c_1e^3 + c_2e^4 + \frac{1}{12} - \frac{29}{144} \\ 2 = c_1e^6 + c_2e^8 + \frac{2}{12} - \frac{29}{144} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{161}{144} - c_2e^4$$

וכו'.