העתקות לינאריות (ה"ל):

11 במאי 2017

הגדרה: יהיו V,W שני מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. ה"ל היא פונקציה $T:V\to W$ כך ש
לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $v_1,v_2\in V$ מתקיים $T(\alpha v_1+v_2)=\alpha T(v_1)+T(v_2)$.
דוגמאות:

1. יהיו $V=\mathbb{F}^n,\ W=\mathbb{F}^m$ שניהם מעל $\mathbb{F}$. $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$
אזי העתקה $L_A:V\to W$ המוגדרת $v\mapsto Av$ היא ה"ל.
הוכחה: לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $v_1,v_2\in V$ מתקיים $T_A(\alpha v_1+v_2)=A(\alpha v_1+v_2)=\alpha Av_1+Av_2=\alpha L_A(v_1)+L_A(v_2)$.

2. $V=\mathbb{F}^{n\times n},\ W=\mathbb{F}$ שניהם מעל $\mathbb{F}$.
אזי העתקה $trace:V\to W$ המגודרת $A\mapsto tr(A)$ היא ה"ל.

3. $V=\mathbb{R}_n[x],\ W=\mathbb{R}_{n-1}[x]$ שניהם מעל $\mathbb{R}$.
אזי העתקה $D:V\to W$ המוגדרת $p(x)\mapsto\frac{d}{dx}p(x)=p'(x)$ היא ה"ל. הוכחה

$$D[\alpha p_1(x)+p_2(x)] \quad = \quad [\alpha p_1(x)+p_2(x)]'=\alpha p_1'(x)+p_2'(x)=\alpha D[p_1(x)]+D[p_2(x)]$$

4. בהינתן V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ מימד n עם בסיס B $T:V\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת $Tv=[v]_B$ היא ה"ל

תכונות בסיסיות:

1. $T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)+\cdots+\alpha_nT(v_n)$
2. $T(0_V)=0_W$

הוכיחו כי הפונקציות הבאות אינן ה"ל:

1. $det:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$
הוכחה: עבור $|2I|\neq 2\,|I|$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1$
הוכחה:

$$0=f(0)=f\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]=f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-1$$

3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=x^2$ או $f(x)=x+1$

תרגיל: תהא $T:V\to W$ ה"ל הפיכה ו $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל V אזי $T(B)$ בסיס ל W.
הוכחה: נראה כי $T(B)$ בת"ל ואז בפרט $|T(B)|=n$ ולכן לפי השלישי חינם בסיס. אכן נניח צ"ל שמתאפס $\sum_i \alpha_i T v_i=0$ ונראה שהמקדמים שווים אפס. מההנחה נובע כי $T\left(\sum_i \alpha_i v_i\right)=0$ כיוון ש Tחח"ע נקבל $\sum_i \alpha_i v_i=0$. בגלל ש B בסיס $\alpha_i=0$ לכל i.

תרגיל: תהא $T:V\to W$ פונקציה הפיכה. הוכיחו כי אם Tה"ל אזי גם ההופכית T^{-1} ה"ל

הוכחה: כיוון ש $v_1=v_2$ אמ"מ $Tv_1=Tv_2$ אזי במקום להוכיח כי $T^{-1}(\alpha w_1+w_2)=\alpha T^{-1}w_1+T^{-1}w_2$ נוכיח כי

$$T\left[T^{-1}(\alpha w_1+w_2)\right]=T\left[\alpha T^{-1}w_1+T^{-1}w_2\right]$$

שמתקיים מלינאריות של T.

הגדרה:יהיו V,W מרחבים מימד סופי מעל $\mathbb{F}$ותהא $T:V\to W$ ה"ל הפיכה ו $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל V ו $B'=\{w_1,\dots,w_m\}$ בסיס ל W אזי המטריצה המייצגת של T לפי B,B' היא המטריצה (היחידה) המוגדרת

$$[T]_{B'}^{B}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_{B'} & [T(v_2)]_{B'} & \cdots & [T(v_n)]_{B'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$$

והיחידה המקיימת

$$\forall v:\ [T]_{B'}^{B}[v]_B=[Tv]_{B'}$$

תרגיל:

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y-z \\ -x+z \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי T ה"ל ומצאו $[T]_{S'}^{S}$ כאשר $S=\{e_1,e_2,e_3\},S'=\{e_1,e_2\}$ הבסיסים הסטד'

פתרון:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y-z \\ -x+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ולכן $T=T_A$ ולכן ה"ל. בנוסף

$$[T]_{S'}^{S}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_{S'} & [T(e_2)]_{S'} & [T(e_3)]_{S'} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל מצאו את המטריצה המייצגת של ה"ל הנ"ל עבור הבסיסים $B'=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_{B'}^{B}=\begin{pmatrix}2&4&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

משפט: יהיו $\underset{B}{V}\xrightarrow{T,T'}\underset{B'}{V'}\xrightarrow{S}\underset{B"}{V"}$ ה"ל/מ"ו/בסיסים בהתאמה אזי

1. $[T+T']_{B'}^{B}=[T]_{B'}^{B}+[T']_{B'}^{B}$
2. $[\alpha T]_{B'}^{B}=\alpha[T]_{B'}^{B}$
3. מתקיים $[S\circ T]_{B"}^{B}=[S]_{B"}^{B'}[T]_{B'}^{B}$
4. T הפיכה אמ"מ $[T]_{B'}^{B}$ הפיכה. במקרה זה $[T^{-1}]_{B}^{B'}=\left([T]_{B'}^{B}\right)^{-1}$.

תרגיל: תהא $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת

$$S(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

מצאו $[S]_{B}^{B'}$ (עבור B,B' ממקודם)

פתרון:

$$[S]_{B}^{B'}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}|\\ [S(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})]_B\\ |\end{matrix} & \begin{matrix}|\\ [S(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})]_B\\ |\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}|\\ [\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}]_B\\ |\end{matrix} & \begin{matrix}|\\ [\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}]_B\\ |\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T\circ S]_{B'}^{B'}=[T]_{B'}^{B}[S]_{B}^{B'}=\begin{pmatrix}2&4&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-1\end{pmatrix}$$

מסקנה: $T\circ S$ הפיכה כי $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ הפיכה.

###

הגדרה: תהא $T:V\to W$ ה"ל אזי

1. $\ker T=\{v:Tv=0\}\leq V$. משפט $\ker T=\{0\}$ אמ"מ T חח"ע
2. $Im(T)=\{Tv:v\in V\}\leq W$. הגדרה: T על אם $ImT=V$

משפט: עבור $T:V\to W$ ה"ל מתקיים $\dim\ker T+\dim ImT=\dim V$

תרגיל: מצאו את מימד הגרעין של $tr:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$

פתרון: כיוון ש $Im(tr)=\mathbb{F}$ אזי המימד שלו 1 ואז

$$\dim\ker T=\dim V-\dim ImT=n^2-1$$

תרגיל: עבור $T:V\to V$ ה"ל מתקיים כי T חח"ע אמ"מ T על

הוכחה: Tחח"ע אמ"מ $\ker T=\{0\}$ אמ"מ $\dim\ker T=0$ אמ"מ $\dim ImT=\dim V$ אמ"מ T על.

תרגיל: תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ה"ל שנתונה המטריצה המייצגת שלה:

$$[T]_{B'}^{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $B'=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. הוכיחו כי T הפיכה, מצאו $[T^{-1}]_S^S$,מצאו את T,T^{-1} מפורשות.

פתרון: המטריצה המייצגת הפיכה והיא

$$[T^{-1}]_B^{B'}=[T]_{B'}^{B-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נשים לב כי $[T^{-1}]_S^S=[I]_S^B[T^{-1}]_B^{B'}[I]_{B'}^S$. נחשב

$$[I]_S^B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_{B'}^S=\left([I]_S^{B'}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$[T^{-1}]_S^S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ומכאן כי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} T^{-1}$. בשביל למצוא מפורשות את T ניתן לחשב את ההופכית של $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. דרך נוספת:

$$[Te_1]_{B'} = [T]^B_{B'}[e_1]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן, $Te_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ באופן דומה

$$[Te_2]_{B'} = [T]^B_{B'}[e_2]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[Te_3]_{B'} = [T]^B_{B'}[e_3]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$Te_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, Te_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

משפט: עבור $T : V \to W$ ו $[T]^B_{B'}$ מטריצה מייצגת מתקיים כי

1. $[\ker T]_B = N([T]^B_{B'})$
2. $[ImT]_{B'} = C([T]^B_{B'})$

תרגיל: תהא $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ ה"ל שנתונה המטריצה המייצגת שלה:

$$[T]^B_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

עבור $B = \{1 + x, x\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו גרעין ותמונה של T

$$N\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = [v]_B \right\}$$

ולכן

$$\ker T = span\left\{-2(1+x)+1\cdot x = -2-x\right\}$$

לפי משפט המימדים נצפה שהתמונה מימד 1 ואכן

$$C(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = [v]_{B'}\right\}$$

ולכן

$$ImT = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל: תהא $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ה"ל שנתונה המטריצה המייצגת שלה:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

עבור $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ מצאו ע"ע וו"ע.

פתרון:

$$p_{[T]_B^B}(\lambda) = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)(\lambda+2)+2 = \lambda^2+\lambda$$

ולכן ע"ע $0,-1$ עבור 0 חישבנו קודם את המ"ע $span\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = [v_1]_B\right\}$ ולכן $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 = -2$ ו"ע של 0. באופן דומה

$$N\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = [v_2]_B\right\}$$

ולכן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ו"ע של 1-.