חקר ביצועים - הרצאה 7

20 בדצמבר 2011

משפט החוק המשלים Complementary Slackness

אם בפתרון האופטימלי ל(1) משתנה חוסר x^*_{n+i} באילוץ הi שונה מ-0, אזי המשתנה הדואלי המתאים לו בפתרון האופטימלי $y^*_i = 0$.
ולהפך - אם המשתנה הדואלי האופטימלי $y^*_i \neq 0$ אזי משתנה החוסר האופטימלי x^*_{n+i} באילוץ הi יהיה שווה 0.
ובאופן מתמטי:

$$\left(x^*_{n+i}\right) \cdot \left(y^*_i\right) = 0$$

כלומר אם אחד המשתנים הוא 0, לא נדע מהו ערך המשתנה השני.

הוכחה

$$Ax^* + Ix^*_s = b$$

נכפיל משמאל בy^*:

$$y^*Ax^* + y^*Ix^* = y^*b$$

אנו יודעים ש$y^*A \geq c$ לכן $y^*Ax^* \geq cx^*$. נציב:

$$cx^* + y^*x^*_s \leq y^*b$$

היות והפתרון אופטימלי:

$$y^*b = cx^*$$

לכן

$$\begin{aligned} y^*x^*_s &\leq 0 \\ y^*x^*_s &\geq 0 \end{aligned}$$

לכן

$$y^*x^*_s = 0$$

לכן

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y^*_i x^*_{n+i} &= 0 \\ \forall i \qquad & y^*_i x^*_{n+i} = 0 \end{aligned}$$

דוגמה

הבעיות הן:
הפרימלית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1+5x_2 \\ \text{s.t}\ &:\ x_1 \le 4 \\ & 2x_2 \le 12 \\ & 3x_1+2x_2 \le 18 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

נעביר לשוויונות:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1+5x_2 \\ \text{s.t:} & \\ x_1+x_3 &= 4 \\ 2x_2+x_4 &= 12 \\ 3x_1+2x_2+x_5 &= 18 \\ x_j &\ge 0 \end{aligned}$$

הפתרון האופטימלי:

$$\begin{aligned} z^* &= 36 \\ x_1^* &= 2 \\ x_2^* &= 6 \\ x_3^* &= 2 \end{aligned}$$

הדואלית:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 4y_1+6y_2+18y_3 \\ \text{s.t}\ &:\ y_1+3y_3 \ge 3 \\ & 2y_2+2y_3 \ge 5 \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

הפתרון האופטימלי:

$$\begin{aligned} w^* &= 36 \\ y_1^* &= 0 \\ y_2^* &= \frac{3}{2} \\ y_3^* &= 1 \end{aligned}$$

נעשה טבלה:

	פרימלי		z	דואלי	
איטרציה	פתרון בסיסי	אפשרי?		אפשרי?	פתרון בסיסי
1	$(0,\ 0,\ 4,\ 12,\ 18)$	כן	0	לא	$(0,\ 0,\ 0,\ -3,\ -5)$
2	$(4,\ 0,\ 0,\ 12,\ 6)$	כן	12	לא	$(3,\ 0,\ 0,\ 0,\ -5)$
3	$(6,\ 0,\ -2,\ 12,\ 0)$	לא	18	לא	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -3)$
4	$(4,\ 3,\ 0,\ 6,\ 0)$	כן	27	לא	$(-\frac{9}{2},\ 0,\ \frac{5}{2},\ 0,\ 0)$
5	$(0,\ 6,\ 4,\ 0,\ 6)$	כן	30	לא	$(0,\ \frac{5}{2},\ 0,\ -3,\ 0)$
6	$(2,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0)$	כן	36	כן	$(0,\ \frac{3}{2},\ 1,\ 0,\ 0)$
7	$(4,\ 6,\ 0,\ 0,\ -6)$	לא	42	כן	$(3,\ \frac{5}{2},\ 0,\ 0,\ 0)$
8	$(0,\ 9,\ 4,\ -6,\ 0)$	לא	45	כן	$(0,\ 0,\ \frac{5}{2},\ \frac{9}{2},\ 0)$

מהפתרון הבסיסי של הפרימלית אפשר לעבור בעזרת המשפט לפתרון הדואלי. האילוצים של הדואלית היא:

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 - y_4 &= 3 \\ 2y_2 + 2y_3 - y_5 &= 5 \end{aligned}$$

ניקח למשל את איטרציה 3 - אנו יודעים ש$x_1,\, x_3,\, x_4 \neq 0$ לכן בהכרח $y_4,\, y_1,\, y_2 = 0$ לכן נקבל:

$$\begin{aligned} 3y_3 &= 3 \\ 2y_3 - y_5 &= 5 \end{aligned}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} y_3 &= 1 \\ y_5 &= -3 \end{aligned}$$

וזה באמת הפתרון באיטרציה ה3 של הדואלית.

הגדרה

מחיר הצל של המשאב הi, y_i^*, מציין את הערך השולי של משאב זה, כלומר, קצב השיפור של z עם הגדלת המשאב b_i.

דוגמה

בדוגמה הקודמת הפתרון האופטימלי היה:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5) = (2,\, 6,\, 2,\, 0,\, 0)$$

ובדואלי היה:

$$(y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4,\, y_5) = \left(0,\, \frac{3}{2},\, 1,\, 0,\, 0\right)$$

האילוצים שלנו בפרימלית היו

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

מחיר הצל של המשאב הראשון הוא 0, כלומר לא משנה כמה נגדיל את אגף ימין של האילוץ הראשון בפרימלית, z לא ישתנה.
לעומת זאת, מחיר הצל של המשאב השני הוא $\frac{3}{2}$, לכן אם נגדיל את אגף ימין של האילוץ השני בk אז z יגדל ב$\frac{3}{2}k$.
כנ"ל עבור המשאב השלישי, מחיר הצל שלו הוא 1 לכן אם נגדיל את אגף ימין של האילוץ השלישי בk אז z יגדל ב$1 \cdot k = k$.

ניתוח רגישות

באופן כללי, אנו עוסקים בבעיות מהסוג:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t} &: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ & \quad x_j \geq 0 \end{aligned}$$

ניתוחי רגישות הם בחינת השפעה של שינויים על השאלה. זהו למעשה כלי לביצוע שינויים בבעיה המקורית מבלי לפתור מחדש את הבעיה.
נזכיר את ההצגה המטריציאלית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= cx \\ \text{s.t} &: Ax \le b \\ & \quad x \ge 0 \end{aligned}$$

ואחרי המעבר לצורה סטנדרטית:

$$Ax + Ix_s = b$$

או

$$[A,\, I] \cdot \begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} = b$$

יהיו לנו m משתנים בסיסיים וn משתנים לא בסיסיים.
B היא מטריצה ריבועית מסדר $m \times m$ הבנוי מעמודות המשתנים הלא-בסיסיים:

$$\begin{aligned} Bx_B &= b \\ x_B &= (x_{B_1},\, ...,\, x_{B_m}) \end{aligned}$$

ואז קיבלנו מערכת בm נעלמים. הפתרון יהיה ע"י מטריצה מהצורה:

$$x_B = B^{-1}b$$

דוגמה

נסתכל בדף (שרומי חילקה) בבעיה הפרימלית.
בטבלה הראשונה נראה כי $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
וקטור המשתנים בטבלה האחרונה נקבל:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כאשר B היא המטריצה של המקדמים בטבלה הראשונה:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

וB^{-1} היא:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$