מישור משיק
1

משטח ב-$\mathbb{R}^3$ (נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור פונק'
$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. אזי $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ נק' על המשטח שבסביבתה
של f גזירה ברציפות, משוואת המישור המשיק למשטח בנק' P_0 היא:

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0$$

תזכורת: משוואת המישור היא $ax+by+cz+d=0$
נורמל למישור במדה זו הוא וקטור המקדמים (a,b,c).
במקרה של המישור המשיק, וקטור הנורמל הוא
$\nabla f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$. המישור המשיק הוא המרחב
הזה המרחב הנפרש ע"י וקטורי הנגזרות הכיווניות.

תרגיל: מצאו את כל הנק' P_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$
כך שהמישור המשיק למשטח בנק' P_0 מקביל
למישור $x+y+z=1$.

פתרון: אזי $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ נק' במשטח. (נגדיר פונקציה:
$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x$$
$$f_y=2y$$
$$f_z=-2z$$

ולכן בנק' שלנו הנורמל למישור המשיק הוא $(2x_0,2y_0,-2z_0)$
כעת, מישורים מקבילים אם הנורמלים שלהם תלויים לינארית.
הנורמל למישור $x+y+z=1$ הוא $(1,1,1)$, לכן נחפש
את כל הנק' P_0 במשטח כך ש: $a\cdot(1,1,1)=(2x_0,2y_0,-2z_0)$
ולכן: $x_0=\frac{a}{2},\ y_0=\frac{a}{2},\ z_0=-\frac{a}{2}$

ולכן הנק': $(x_0,y_0,z_0)=(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$, נדרוש ש-$P_0$
נמצאת על המשטח ולכן מקיימת את משוואת המשטח:

$$x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=0$$

כלומר
$$\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=0$$

ולכן $a=\pm 2$ ולכן יש שתי נקודות:
$(1,1,-1)$ $(-1,-1,1)$

(2) אינטגרציה

מטרה: לחשב את האינטגרל הכפול $\iint_A f(x,y)\,dA$.

איך מחשבים את האינטגרל הכפול?:

(1) אם $f(x,y)$ רציפה בתחום מלבני $R=[a,b]\times[c,d]$, אזי

$$\iint_R f\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx}_{(*)} = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

האינטגרל (*) נקרא האינטגרל החוזר, וכדי לחשב אותו, מתחילים קודם כל באינטגרל הפנימי, מתייחסים את אחד המשתנים כקבוע ועושים אינטגרציה לפי המשתנה השני, ולאחר מכן מחשבים את האינטגרל השני לפי המשתנה השני.

תרגיל: חשבו את האינטגרל הכפול במלבן: $R=[-3,2]\times[0,1]$

$$\iint_R y^2x^2\,dR$$

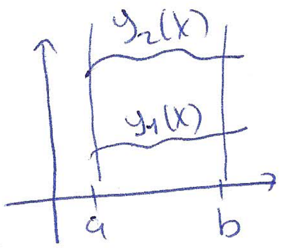
פתרון: $f(x,y)$ רציפה במלבן R ולכן:

$$\iint_R y^2x^2\,dR = \int_0^1\int_{-2}^{3} y^2x^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-2}^{3} y^2x^2\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1\left[\frac{y^2x^3}{3}\right]_{-3}^{2}dy = \int_0^1\left(\frac{8y^2}{3}+\frac{27y^2}{3}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{8y^3}{9}+3y^3\right]_0^1 = \frac{35}{9}$$

(2) אם $f(x,y)$ רציפה בתחום מסוג I:



$$R=\{a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

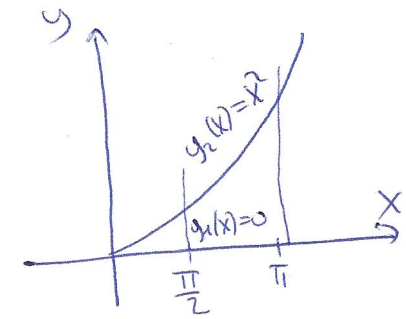
אזי:

$$\iint_R f\,dR = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

לאינטגרל זה (נקרא אינטגרל מסוג I, ולתחום R כזה שמוגבל מלמעלה ולמטה ע"י גרפי פונ' של x (נקרא תחום מסוג I.

תרגיל: חשבו:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{x^2}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,dy\,dx$$

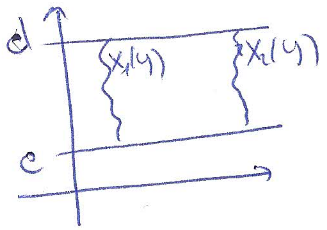


פתרון: ראינו שהתחום שלנו הוא תחום
נורמלי I לכן:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{x^2}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,dy\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi}\left[\sin\frac{y}{x}\right]_0^{x^2}dx=$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}[\sin x]\,dx=-\cos\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1-0=1$$

3) אם f רציפה בתחום



$$R=\{x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$$

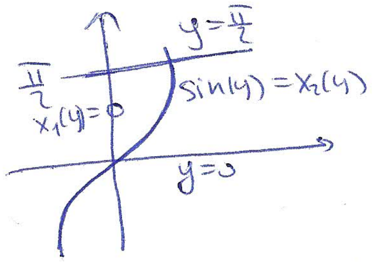
אזי:

$$\iint_R f\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,dx\right)dy$$

תרגיל: חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\sin y}e^x\cos y\,dx\right)dy$$

פתרון:



$$\int_0^{\pi/2}\left[e^x\cos y\right]_0^{\sin y}dy=$$

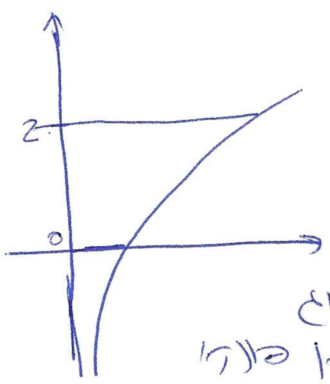
$$=\int_0^{\pi/2}\left[e^{\sin y}\cos y-\cos y\right]dy=$$

$$=\left[e^{\sin y}-\sin y\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=e-1-[1-0]=e-2$$

לפעמים (רצוי) להפוך את האינטגרל מסוג I לאינטגרל מסוג
שני ולהפך.

תרגיל - החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2\int_1^{e^y}f(x,y)\,dx\,dy$$



פתרון: קודם כל רצוי תמיד לצייר את התחום:
כאן יש לנו אינטגרל מסוג שני בתחום מסוג שני
כלומר תחום שחסום ע"י 2 פונקציות של
של y. (רצוי להפוך אותו לתחום מסוג
I כלומר תחום שחסום ע"י שתי פונקציות של
של x: התחום שלנו הוא: $\{1\le x\le e^y,\ 0\le y\le 2\}$

$x=e^y\Rightarrow y=\ln x$

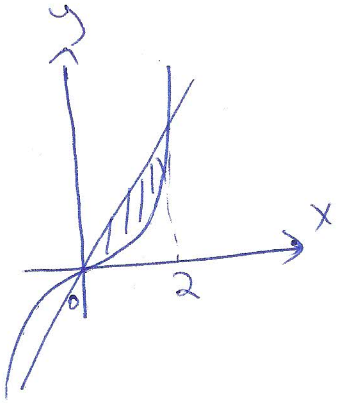
$y=2=\ln x\Rightarrow x=e^2$

ולכן התחום שנקבל הוא: $\{\ln x \le y \le 2,\ 1 \le x \le e^2\}$
שהוא תחום כמו מקודם אבל הפוך שהוא כתחום
מסוג I, ועכשיו אפשר להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\int_1^{e^2}\int_{\ln x}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$$

תרגיל: החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^4\int_{3x^3}^{12x} f(x,y)\,dy\,dx$$



פתרון: נצייר את התחום שלנו:
ברור שזה תחום מסוג I, כדי להחליף
את סדר האינטגרציה ~~...~~ נציג את ~~...~~
~~...~~ התחום שלנו כתחום מסוג II:

$$D=\{0\le x\le 4,\ 3x^3\le y\le 12x\}$$

$$x=\frac{y}{12} \Leftarrow y=12x$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{y}{3}} \Leftarrow y=3x^3$$

$$0\le y\le 24$$

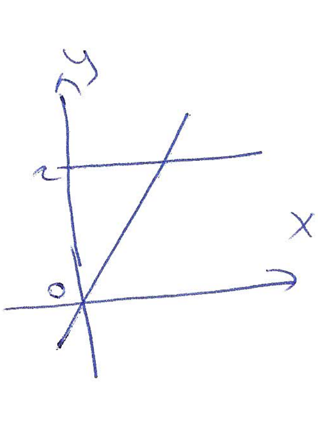
$$\Downarrow$$

$$D=\{0\le y\le 24,\ \frac{y}{12}\le x\le\sqrt[3]{\frac{y}{3}}\}$$

ועכשיו אפשר להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\int_0^{24}\int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt[3]{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,dx\,dy$$

תרגיל: חשבו את $\int_0^2\int_{y/2}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$



פתרון: זהו אינטגרל מסוג שני ואנחנו
מתבקשים דווקא לעשות אינטגרציה לפי x
ולאחר מכן לפי y, אבל אין לנו פונק"צ קדומה ל-e^{x^2}
אין פונקציה אלמנטרית, שהנגזרת שלה היא e^{x^2}.
פתרון לבעיה: נשנה את סדר האינטגרציה:
התחום שלנו: $D=\{0\le y\le 2,\ y/2\le x\le 1\}$
נציג אותו כתחום מסוג I:

$x=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2x \Rightarrow 0\le y\le 2x$

$0\le x\le 1$

ולכן נשנה את סדר האינטגרציה ונחשב את האינטגרל:

$$\int_0^1\int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^1 e^{x^2}[2x]\,dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=e-1$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

הגדרה: תהי $S\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו $g:S\to\mathbb{R}^n$

חח"ע על S כך ש $|J_g(t)|\neq 0$ לכל $t\in S$.

אזי לכל A קומפקטית בעלת נפח ו $A\subseteq g(S)$ ו

$f:A\to\mathbb{R}$ רציפה, מתקיים:

$$\int_A f(x)\,dx=\int_{g^{-1}(A)} f(g(t))\,|J(t)|\,dt$$

הסבר עבור פונ' $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

אם $f(x,y):D\to\mathbb{R}$ ואם $g(u,v):S\to D$ אזי

$$f\circ g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$$

וכן:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

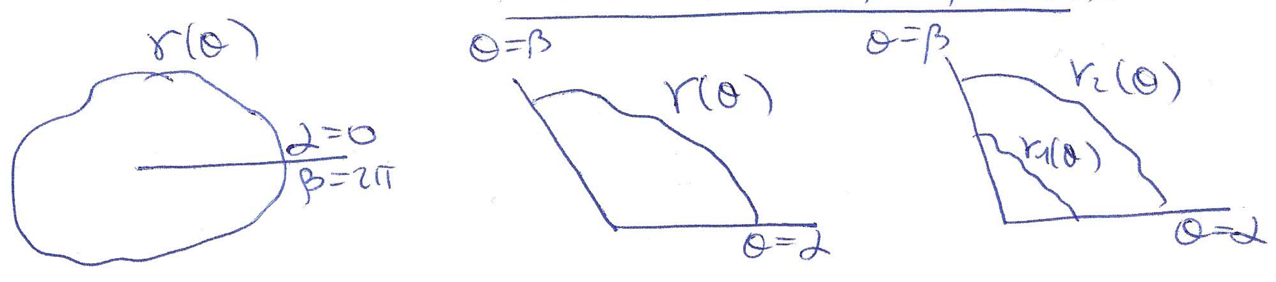
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות

הגדרה: תחום קוטבי פשוט (במערכת קוטבית) - מוגבל ע"י שני קרניים $\theta=\alpha$ ו $\theta=\beta$ ושני עקומות רציפות, שהפונקציות הקוטביות הן $r=r_1(\theta)$ $r=r_2(\theta)$ כאלה:

1) $\alpha\le\beta$ ו $\beta-\alpha\le 2\pi$

2) $0\le r_1(\theta)\le r_2(\theta)$ לכל $\alpha\le\theta\le\beta$

תחומים קוטביים פשוטים



קואורדינטות קוטביות

- הצבה מעגלית היא:

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

כאשר $(r,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]$

- היעקוביאן במקרה זה הוא:

$$\begin{vmatrix} (r\cos\theta)_r & (r\cos\theta)_\theta \\ (r\sin\theta)_r & (r\sin\theta)_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

<u>תרגיל</u>: חשבו את האינטגרל:

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

כאשר: $D=\{x^2+y^2\le 1\}$

<u>פתרון</u>: נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$D=\{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\le 1\}=\{r\le 1\}$$

וכל האפשר $0\le r$ ולכן $0\le r\le 1$.

$$\iint_D=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sin\left(\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\right)\underbrace{r}_{\text{היעקוביאן}}\,dr\,d\theta=$$

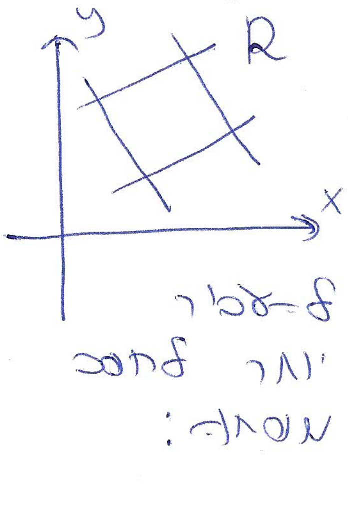
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sin r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[-r\cos r\Big|_0^1+\int_0^1\cos r\right]dr=$$

$$=2\pi\left[\sin 1-\cos 1\right]$$

<u>תרגיל</u>: חשבו את האינטגרל הכפול:

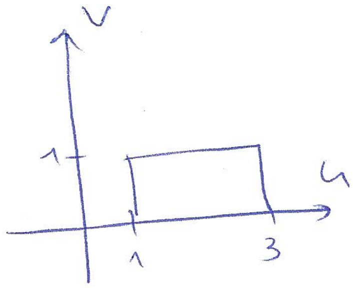
$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dA$$

כאשר R הוא המלבן המוגבל ע"י הישרים $x-y=1$, $x-y=0$, $x+y=1$, $x+y=3$.



<u>פתרון</u>: אפשר לחשב את האינטגרל בלי שינוי משתנים, אבל נצטרך ל-(נצטרך לחלק את R לשני תחומים שכל אחד מהם תחום מסוג I או משולבים תחומים מסוג II, אבל אפשר לעבור מתחום R לתחום R' שבו הרבה יותר פשוט לחשב את האינטגרל, נצטרך לבצע שינוי משתנה:

נשתמש בהצבה: $u=x+y$, $v=x-y$



אזי $1\le u\le 3$, $0\le v\le 1$

אזי התחום שלנו במערכת צירים uv הופך להיות התחום הבא:

(צריך את x, y כפונקציות של u, v ולחשב את היעקוביאן:

$$x=\frac{1}{2}(u+v) \qquad y=\frac{1}{2}(u-v)$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dA=\iint_S \frac{v}{u}\,|J|\,dA_{uv}=\iint_S \frac{u}{v}\left|-\frac{1}{2}\right|A_{uv}=\frac{1}{2}\int_0^1\int_1^3 \frac{v}{u}\,du\,dv=$$

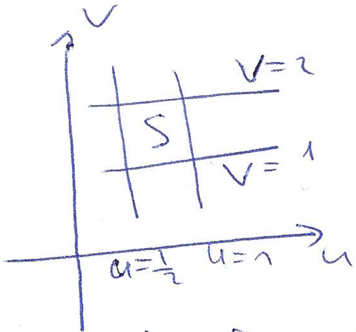
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v\ln|u|\Big|_1^3\,du=\frac{1}{2}\ln 3\int_0^1 v\,dv=\frac{1}{4}\ln 3$$

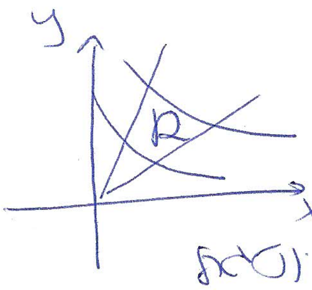
<u>תרגיל:</u> חשב את האינטגרל הכפול

$$\iint_R e^{xy}\,dA$$

כאשר R הוא התחום המוגבל ע"י הישרים $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$

וע"י ההיפרבולות $y=1/x$ $y=2/x$





<u>פתרון:</u> אפשר כמו מקודם לחשב את האינטגרל ללא שינוי משתנים - אבל אז צריך ~~לפרק~~ לחלק תחום R לשני תחומים מסוג I או לשני תחומים מסוג II ולחשב אינטגרל בכל אחד מהם בנפרד, ואז הסכום של שני ערכים - זאת יהיה האינטגרל שלנו. אבל אפשר גם ע"י שינוי משתנים להעביר תחום R לתחום S במערכת צירים uv כאשר S הוא מלבן שעליו אפשר לחשב אינטגרל בלי בעיה:

נסמן: $u=\frac{y}{x}$ $v=xy$ אזי: $\frac{1}{2}\le u\le 1$, $1\le v\le 2$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2u}$$

$$\iint_R e^{xy}\,dA=\iint_S e^{v}\left|-\frac{1}{2u}\right|dA_{uv}=\frac{1}{2}\iint_R \frac{1}{u}\cdot e^{v}\,dA_{uv}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\int_{1/2}^1 \frac{1}{u}e^{v}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_1^2 e^{v}\ln|u|\Big|_{\frac{1}{2}}^1 dv=\frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 e^{v}\,dv=$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2}$$

חישוב שטח באמצעות אינטגרל כפול

לפעמים האינטגרל הכפול הכללי סימונו בעיה של חישוב נפח, אך מושג זה ניתן ליישום גם בחישוב שטחים. לשם כך, חשוב על הצורה הנמצאת בין המישור $z=1$ לבין התחום R שבמישור xy. הנפח V של גוף זה הוא:

$$V=\iint_R 1\,dA=\iint_R dA$$

מצד שני:

$$V=(\text{שטח הבסיס})\times\underbrace{(\text{הגובה})}_{=1}=(\text{שטח הבסיס})$$

מכאן הערך המספרי של שטח R = הערך המספרי של V. נוכל לכתוב נוסחה לשטח:

$$\text{השטח של } R=\iint_R dA$$

<u>תרגיל:</u> חשב את שטח האליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

<u>פתרון:</u> אמרנו שהשטח של צורה גאומטרית הוא האינטגרל של 1 על התחום. כלומר נחשב:

$$\iint_D 1\,dxdy$$

כאשר

$$D=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$$

נעבור מתחום D שהוא אליפסה לתחום D' שהוא מעגל ע״י החלפת משתנים הבאה:

$$x=ar\cos\theta \qquad y=br\sin\theta \qquad D'=\{r\le 1\}$$

היעקוביאן במקרה זה הוא: $|J|=abr$

במקרה שלנו $r\in[0,1]$ $\theta=[0,2\pi]$ ולכן האינטגרל:

$$\iint_D 1\,dA=\iint_{D'}|J|\,dA_{r\theta}=\int_0^1\int_0^{2\pi} abr\,d\theta\,dr=\pi ab$$

תרגול 12 אינפי 3

20 בינואר 2015

מישור משיק:

משטח ב־$\mathbb{R}^3$ נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה שבסביבה U שלה f גזירה ברציפות.

משוואת המישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 היא:

$$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$$

זכרו שמשוואת מישור היא: $ax+by+cz+d=0$. נורמל למישור במקרה זה הוא וקטור המקדמים, קרי: (a,b,c).

במקרה של המישור המשיק, נקבל שהנורמל הוא $(f_x(p_0),f_y(p_0),f_z(p_0))$.

המישור המשיק הוא המרחב הנפרש ע"י וקטורי הנגזרות הכיווניות.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את כל הנקודות p_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 מקביל למישור: $x+y+z=1$.

<u>פתרון:</u>

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה במשטח. נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x$$

$$f_y=2y$$

$$f_z=-2z$$

ולכן בנקודה שלנו הנורמל למישור המשיק יהיה $(2x_0, 2y_0, -2z_0)$.
כעת, מישורים מקבילים אם הנורמלים שלהם תלויים ליניארית.
הנורמל למישור $x + y + z = 1$ הוא $(1, 1, 1)$. לכן, נחפש את כל הנקודות p_0 במשטח כך ש:

$$a \cdot (1, 1, 1) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

נקבל:

$$x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{a}{2}, z_0 = -\frac{a}{2}$$

כעת, הנקודה שלנו על המשטח, ולכן צריך להתקיים:

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1 = 0$$

כלומר:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

ולכן $a = \pm 2$.
ולכן שתי הנקודות שתקיימנה את הדרוש הן:

$$(1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

<u>שאלה:</u>
יהי $k > 0$. הוכיחו שנפח הגוף החסום ע"י מישורי הקואורדינטות ($x, y, z \geq 0$) והמישור המשיק למשטח:

$$xyz = k$$

אינו תלוי בנקודת ההשקה.
הגוף המתקבל הוא טטראדר (פירמידה משולשת).
נפח פירמידה הוא $\frac{S \cdot h}{3}$. h הוא גובה הפירמידה - מרחק הנקודה $(0, 0, 0)$ מהמישור המשיק שלנו (נסו לצייר והיווכחו שהוא אכן בסיס הפירמידה).

S הוא שטח הבסיס, שהוא משולש. כדאי לחשב את השטח בעזרת נוסחת הרון, שאינה דורשת זוויות.

ניקח נקודה כללית (x_0, y_0, z_0) ונחשב באמצעותה את S, h.

נחשב את המישור, נחשב את מרחק הנקודה ממנו, נבין מהם אורכי צלעות המשולש וכן הלאה; הכל באמצעות הנקודה שלנו.

הביטויים צריכים לבטל זה את זה, ונישאר עם ביטוי שכולל רק מספרים קבועים ואת k.

אינטגרציה:

כמה דברים לפני שנכנסים לעובי קורת האינטגרלים הכפולים.

יהיו R, R_1, R_2 תחומים חסומים וסגורים ב-$\mathbb{R}^2$, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בתחומים אלו. אזי:

1. $\iint\limits_R (af+bg)ds = a\iint\limits_R fds + b\iint\limits_R gds$
2. אם $R_1 \cup R_2 = R$ וגם $R_1 \cap R_2 = \phi$, אז: $\iint\limits_R fds = \iint\limits_{R_1} fds + \iint\limits_{R_2} fds$.
3. קיימת נקודה (x_0, y_0) עבורה: $\iint\limits_R fds = S(R)\cdot f(x_0,y_0)$, כאשר $S(R)$ הוא שטח התחום R.
4. $m\cdot S(R) \le \iint\limits_R fds \le M\cdot S(R)$, כאשר $M = \max\limits_R f, m = \min\limits_R f$.
5. $\left|\iint\limits_R fds\right| \le \iint\limits_R |f|\,ds$.

איך מחשבים אינטגרל כפול?

1. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום המלבני: $R=[a,b]\times[c,d]$, אזי:

$$\iint\limits_R fdxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

2. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום: $R=\{a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, אזי:

$$\iint\limits_R fdxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

3. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום $R=\{x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$, אזי:

$$\iint\limits_R fdxdy = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint\limits_R y^2x^2ds$$

במלבן $R=[-3,2]\times[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

נסמן $f(x,y)=y^2x^2$. f רציפה ותחומנו מלבני. לכן:

$$\iint\limits_R y^2x^2ds=\int\limits_0^1\int\limits_{-2}^3 y^2x^2dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-2}^3 y^2x^2dx\right)dy$$

והאינטגרל הפנימי הוא אינטגרל במשתנה אחד. לכן:

$$=\int\limits_0^1\left(\left[\frac{y^2x^3}{3}\right]_{x=-3}^{x=2}\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{8y^2}{3}+\frac{27y^2}{3}\right)dy=\left[\frac{8y^3}{9}+3y^3\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{35}{9}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_R x^2ydxdy$ כאשר R הוא התחום החסום ע"י $x=2,x=-2,y^2-x^2=1$.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$R=\{-2\le x\le 2,-\sqrt{1+x^2}\le y\le\sqrt{1+x^2}\}$$

והאינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_R x^2ydxdy=\int\limits_{-2}^2\int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}x^2ydydx=\int\limits_{-2}^2\left(\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1+x^2}}^{y=\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\int\limits_{-2}^2\left(\frac{x^2(1+x^2)}{2}-\frac{x^2(1+x^2)}{2}\right)dx=\int\limits_{-2}^2 0dx=0$$

*איך היינו מחשבים את השטח? כמו במקרה של משתנה אחד, מסתכלים על התחום $0\le y\le\sqrt{1+x^2}$ וכופלים את התוצאה ב־2.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את $\iint\limits_D ydxdy$ כאשר D הוא התחום הכלוא בין הישר $y = -x+5$ והמעגל $x^2+y^2=25$ ברביע הראשון.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$D = \{0 \le x \le 5, 5-x \le y \le \sqrt{25-x^2}\}$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^5 \left(\int\limits_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} ydy \right) dx = \int\limits_0^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^5 \left(\frac{25-x^2}{2} - \frac{(5-x)^2}{2}\right) dx = \left[\frac{25x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(5-x)^3}{6}\right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

<u>תרגיל:</u>

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$$

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$\{0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

כלומר:

$$\{0 \le y \le \sqrt{2}, y^2 \le x \le 2\}$$

ולכן:

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_{y^2}^2 f(x,y)dxdy$$

<u>תרגיל:</u>
החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy$$

<u>פתרון:</u>
התחום שלנו הוא:

$$\{1 \le x \le e^y, 0 \le y \le 2\}$$

כלומר:

$$\{1 \le x \le e^2, \ln x \le y \le 2\}$$

ולכן:

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy = \int_1^{e^2} \int_{\ln x}^{2} f(x,y)dydx$$

<u>תרגיל:</u>
החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^4 \int_{3x^3}^{12x} f(x,y)dydx$$

<u>פתרון:</u>
התחום שלנו הוא:

$$\{0 \le x \le 4, 3x^2 \le y \le 12x\}$$

כלומר:

$$\{0 \le y \le 48, \frac{y}{12} \le x \le \sqrt{\frac{y}{3}}\}$$

ולכן:

$$\int_0^4 \int_{3x^3}^{12x} f(x,y)dydx = \int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dxdy$$

<u>תרגיל:</u>

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dydx$$

<u>פתרון:</u>

נצייר את הגרפים של שתי הפונקציות: $y = \sqrt{2x-x^2}$, $y = \sqrt{2x}$.
שימו לב שהפונקציה $y = \sqrt{2x-x^2}$ היא המעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בנקודה $(1,0)$.
נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות היא $x = 0$.
כלומר, ה-x שלנו לא כלוא בין שני y-ים. איך בכל זאת נחשב את האינטגרל?
מחלק את התחום שלנו לתחומים בהם x כן כלוא כמו שאנו צריכים.
התחום הראשון הוא $0 \le y \le 1$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{1-y^2}+1$.
התחום השני הוא $0 < y \le 1$ ובו $\sqrt{1-y^2}+1 \le x \le 2$.
התחום השלישי הוא $1 \le y \le 2$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le 2$.
סכום שלושת האינטגרלים הללו ייתן לנו את האינטגרל המבוקש.