משפטים למבחן בחשבון אינפיניטסימלי II

דביר חדד

☺ תודה רבה ל**נועה רובין** על הסיכומים במהלך השנה ☺

א. משפט: פונקציה רציפה בקטע סגור הינה אינטגרבילית

הוכחה: נוכיח כי כל פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית. לפי המשפט הראשון של ויירשטראס f(x) רציפה ולכן חסומה בקטע [a,b]. ולכן התנאי הראשון בשביל רימן מתקיים.

יהי $\varepsilon > 0$, f(x) רציפה במ״ש בקטע [a,b]. זאת אומרת קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in [a, b]$ אם $|x - y| < \delta$ אזי $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. אנו טוענים כי δ זה עובד לתנאי השני של קריטריון רימן.

אכן, תהי חלוקה T כך ש$\lambda(T) < \delta$. הקטע $[x_{i-1}, x_i]$ הינו סגור והפונקציה רציפה בו.

לכן, לפי ויירשטראס השני קיימות נקודות מינימום ומקסימום שמקיימות $y_i, z_i \in [a, b] : f(y_i) = \inf\{f(x), x \in \Delta x_i\} = m_i$ וגם $f(z_i) = \sup\{f(x), x \in \Delta x_i\} = M_i$.

לכן $\omega_i = M_i - m_i$.

אבל שתי הנקודות y_i, z_i נמצאות באותו תת קטע של T לכן בהכרח $|z_i - y_i| \leq \Delta x_i \leq \lambda(T) < \delta$

ולכן $|f(z_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ופרט $\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

לכן $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon$. זהו התנאי השני, הוא מתקיים, ולכן f(x) אינטגרבילית. מ.ש.ל. ■

ב. משפט: פונקציה מונוטונית בקטע סגור הינה אינטגרבילית

הוכחה: נניח כי הפונקציה שלנו היא עולה, עבור יורדות ההוכחה דומה. בעצם מראים כי קריטריון רימן מתקיים. הפונקציה מונוטונית, לכן עבור $x \in [a, b]$ מתקיים $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. בפרט, f(x) חסומה, והקריטריון הראשון מתקיים.

כעת, יהי $\varepsilon > 0$. אם f(a)=f(b) אז הפונקציה היא קבועה, והוכחנו בעבר כי פונקציה קבועה היא אינטגרבילית. נניח כי f(x) אינה קבועה, ז״א f(a)<f(b).

נגדיר $0 < \delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ ונבדוק אם הוא עובד לתנאי השני של הקריטריון של רימן. תהי חלוקה T כך ש$\lambda(T) < \delta$.

$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. לכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ אם $x \in [x_{i-1}, x_i]$ אזי $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$

וגם יוצא כי $f(x_{i-1}) = \inf\{f(x), x \in \Delta x_i\} = m_i$

וגם $f(x_i) = \sup\{f(x), x \in \Delta x_i\} = M_i$ כי היא מונוטונית עולה.

קיבלנו $\omega_i = M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

לכן $\varepsilon = \delta\big(f(b) - f(a)\big) = \delta \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} \delta\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \overset{\Delta x_i \le \lambda(T) < \delta}{\gtrapprox} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$.

ז"א, לכל $\varepsilon > 0$ מצאנו $\delta > 0$ כך שלכל T עם $\lambda(T) < \delta$ מתקיים התנאי השני של רימן $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. ומכאן

ש*f(x)* אינטגרבילית. מ.ש.ל. ■

ג. **משפט** : פונקציה היא אינטגרבילית בקטע סגור אם ורק אם בכל אפסילון קיימת חלוקה של הקטע כך שההפרש בין סכומי דרבו העליון והתחתון הינו פחות מאפסילון.

תהי f(x) פונקציה שמוגדרת בקטע [a,b] ואינטגרבילית בקטע זה או"א היא מקיימת את שתי התנאים הבאים :

1. f(x) חסומה בקטע [a,b].
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T שמקיימת $\lambda(T) < \delta$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$.

הוכחה :

$\Leftarrow$: נניח כי f(x) אינטגרבילית. לפי משפט, היא חסומה. ולכן התנאי הראשון מתקיים. בגלל שהפונקציה אינטגרבילית מתקיים כי $\int_a^b f(x)dx = I = \overline{I} = \underline{I}$.

יהי $\varepsilon > 0$, לפי דרבו אנו יודעים שקיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T עם פרמטר $\lambda(T) < \delta$ מתקיים $I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(T)$ וגם $\overline{S}(T) < I + \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$. זהו בדיוק התנאי השני. נעבור להוכחת הכיוון השני.

$\Rightarrow$: נניח כי שני התנאים שכתבנו מתקיימים. לפי תנאי א' f(x) חסומה, ולכן $\overline{I}, \underline{I}$ מוגדרים. לפי משפט , כדי להוכיח ש f(x) אינטגרבילית מספיק להוכיח כי $\overline{I} = \underline{I}$. לפי תנאי ב', מתקיים כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T שמקיימת $\lambda(T) < \delta$ מתקיים $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$. בנוסף ידוע כי לכל חלוקה T מתקיים $\overline{S}(T) \ge \overline{I} \ge \underline{I} \ge \underline{S}(T)$.

מכאן ש $0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$ וזה נכון לכל $\varepsilon > 0$, לכן $\overline{I} = \underline{I}$ ולכן f(x) אינטגרבילית. מ.ש.ל. ■

ד. **משפט** : כאשר מעדנים את החלוקה, הסכום העליון אינו גודל.

נניח כי T' היא העדנה של T. אזי $\overline{S}(T') \le \overline{S}(T)$.

הוכחה : ראשית, אם T=T' ברור שהסכומים העליונים שווים וסיימנו.

נניח כי $T' \neq T$. מקבלים את החלוקה החדשה ע"י הוספת מספר סופי של נקודות. באינדוקציה, מספיק להוכיח את הטענה במקרה בו החלוקה החדשה מתקבלת מT ע"י הוספת נקודה אחת.

לכן, בלי הגבלת הכלליות T' מתקבלת מT ע"י זה שחילקנו את Δx_k לשניים (הוספנו נקודה C בין x_{k-1} ו x_k) .

נגדיר
$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x), x \in x\Delta_i\} & M_i &= \sup\{f(x), x \in x\Delta_i\} \\ m_k' &= \inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, C]\} & M_k' &= \sup\{f(x), x \in [x_{k-1}, C]\}. \\ m_k'' &= \inf\{f(x), x \in [C, x_k]\} & M_k'' &= \sup\{f(x), x \in [C, x_k]\} \end{aligned}$$

כעת , $\overline{S}(T) = M_1\Delta x_1 + \cdots + M_n\Delta x_n$. ואז $\overline{S}(T') = M_1\Delta x_1 + \cdots + M_k'(C - x_{k-1}) + M_k''(x_k - C) + M_n\Delta x_n$

ולכן $M_k(C - x_{k-1}) + M_k(x_k - C) - M_k\Delta x_k \ge \underbrace{M_k'(C - x_{k-1}) + M_k''(x_k - C)}_{0\le} - M_k\Delta x_k \ge \overline{S}(T') - \overline{S}(T)$. ואז

קיבלנו כי $\overline{S}(T') - \overline{S}(T) \le 0$, ולכן $\overline{S}(T') \le \overline{S}(T)$ – ז"א שהעדנה של חלוקה לא מגדילה את $\overline{S}(T)$. מ.ש.ל. ■

ה. משפט : מבחן האינטגרלי להתכנסות.

תהי פונקציה f(x) חיובית שהיא מונוטונית לא עולה בקטע $[a,\infty]$ (ואז בפרט היא אינטגרבילית ב[a,b] ולכן ניתן לשאול לגבי ההתכנסות של $\int_a^b f(x)dx$). אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ מתכנס.

הוכחה :

$\Leftarrow$: נגדיר שתי פונקציות מדרגות. לכל $n\in N$ נגדיר $\begin{matrix} g(x)=f(a+n): a+n\le x<a+n+1 \\ h(x)=f(a+n+1): a+n\le x<a+n+1 \end{matrix}$. f מונוטונית ולא עולה, לכן $f(a+n+1)\le f(x)\le f(a+n)$ ולכן $h(x)\le f(x)\le g(x)$. נגדיר $\begin{matrix} F(b)=\int_a^b f(x)dx \\ G(b)=\int_a^b g(x)dx \\ H(b)=\int_a^b h(x)dx \end{matrix}$. ידוע כי f,g,h אי שליליות , ולכן F,G,H מונוטונית לא יורדות. לכן כל אחד מהאינטגרלים מתכנס כאשר הגבול העליון b שואף לאינסוף אם הפונקציה המתאימה חסומה.

לפי ההנחה $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם $\int_a^\infty h(x)dx$ מתכנס ולכן H(b) חסומה מלעיל ולכן $\{H(a+n)\}_{n=0}^\infty$ חסומה מלעיל. אבל $H(a+n)=\int_a^{a+n}h(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i}^{a+i+1}h(x)\,dx=$ $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i}^{a+i+1}f(a+i+1)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i+1)=\sum_{i=1}^{n}f(a+i)$. לכן סדרת הסס"ח של $\sum_{i=1}^{n}f(a+i)$ חסומה ולכן הוא מתכנס . לכן גם הטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ מתכנס.

$\Rightarrow$: נניח כי הטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ מתכנס. לכן סדרת הסכומים החלקיים שלו מתכנסת, ובפרט היא חסומה מלעיל. לכן, הסדרה $\{\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i)\}_{n=1}^\infty$ חסומה מלעיל.

נגדיר $f(a+i)=\int_{a+1}^{a+i+1}g(x)dx$. ו $G(a+n)=\int_a^{a+k}g(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i}^{a+i+1}g(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i)$.

לכן $\{G(a+n)\}_{n=0}^\infty$ סדרה חסומה מליל . יהי M חסם עליון שלה.

לכל x ממשי קיים n טבעי כך ש $x\le a+n$. לכן $G(x)\le G(a+n)\le M$ לכן g(x) חסומה ולכן האינטגרל שלה מתכנס. אבל לכל x ממשי ידוע שמתקיים $0\le f(x)\le g(x)$. ע"פ המבחן ההשוואה, גם f(x) מתכנס. מ.ש.ל. ■

ו. משפט : מבחן דיריכלה להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים מן הסוג הראשון

יהי $a\in R$ כך שg(x) אינטגרבילית ב[a,b] לכל b>a. נניח כי קיים L ממשי כך ש $\left|\int_a^b g(x)dx\right|\le L$. נניח גם כי f(x) יורדת וכי $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. אז $\int_a^b g(x)f(x)dx$ מתכנס.

הוכחה :

יהי $\varepsilon>0$. כיוון שנתון כי $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ קיים n_0 כך שלכל $x\ge n_0$ מתקיים $f(x)=|f(x)|<\frac{\varepsilon}{4L}$

מצד שני, לכל $a<b_1+b_2$ מתקיים :

$$\left|\int_{b_2}^{b_1}g(x)dx\right|=\left|\int_a^{b_2}g(x)dx-\int_a^{b_1}g(x)dx\right|\le\left|\int_a^{b_2}g(x)dx\right|+\left|\int_a^{b_1}g(x)dx\right|\le 2L$$

לכן מתקיים $\left|\int_{b_2}^{b_1}g(x)dx\right|\overset{b_1\le c\le b_2 \text{ עבור}}{\stackrel{?}{=}}\left|f(b_1)\int_{b_1}^{c}g(x)dx+f(b_2)\int_{c}^{b_2}g(x)dx\right|$

$$\leq |f(b_1)|\left|\int_{b_2}^{b_1} g(x)dx\right| + |f(b_1)|\left|\int_{b_2}^{b_1} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4L}2L + \frac{\varepsilon}{4L}2L = \varepsilon$$

וע״פ קריטריון קושי, האינטגרל מתכנס. מ.ש.ל. ■

ז. משפט : מבחן הM של ווירשטראס.

יהי $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ טור של פונקציות מוגדרות בקטע I. נניח שלכל $n \geq 0$ קיים קבוע $a_k \geq 0$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים $|u_k(x)| \leq a_k$. אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (של מספרים) מתכנס, אזי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במידה שווה.

הוכחה : נבדוק את קריטריון קושי עבור הטור של הפונקציות. יהי $\varepsilon > 0$, ע״פ קריטריון קושי עבור טורי מספרים קיין N כל שכל $n \geq N$ ולכל $p \geq 0$ מתקיים $\sum_{k=n}^{n+p} a_k < \infty$. בפרט, לכל $x_0 \in I$ ולכל $n \geq N$ ולכל $p \geq 0$ מתקיים כי $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p}|u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$ ולכן הטור $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במ״ש לפי קריטריון קושי עבור טורי פונקציות. מ.ש.ל. ■

ח. משפט : אם סדרת פונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע סגור, אזי האינטגרלים שלהם שואפים לאינטגרל של הפונקציה הגבולית.

תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות בקטע [a,b].

נזכור שניתן להגדיר פונקציות כך $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$. נניח שהסדרה $\{f_n(x)\}_{x=1}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש לפונקציה גבולית f(x). אזי :

1. הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש לפונקציה גבולית F(x).
2. הפונקציה הגבולית f(x) אינטגרבילית בקטע [a,b].
3. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

הוכחה :

2. יהי $\varepsilon > 0$. לפי ההנחה קיים n מספיק גדול כך שמתקיים $\forall x \in [a,b] : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$.

בפרט, לכל $y', y'' \in [a,b]$ מתקיים

$|f(y') - f(y'') - f_n(y') + f_n(y'')| \leq |f_n(y') - f(y')| + |f_n(y'') - f(y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. לפי ההנחה שלנו הפונקציה $f_n(x)$ אינטגרבילית בקטע [a,b]. לכן היא חסומה בקטע וקיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T של הקטע עם $\lambda(T) < \delta$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n} \omega_{f_{n,i}} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$ ו $\omega_{f_{n,i}} = \sup\{f_n(x): x \in \Delta x_i\} - \inf\{f_n(x): x \in \Delta x_i\}$.

לפי אי שיוויון המשולש $\forall x \in [a,b]: |f(x)| \leq |f_n(x)| + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ ולכן f(x) חסומה.

יותר מזה, לכל $y', y'' \in [a,b]$ מתקיים $|f(y') - f(y'')| \leq |f_n(y') - f_n(y'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

ונגדיר $\omega_{f,i} = \sup\{f(y') - f(y''): y', y'' \in \Delta x_i\} \leq \omega_{f_{n,i}} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ כיוון שזהו חסם מלעיל עבור $\{f(y') - f(y''): y', y'' \in \Delta x_i\}$ אזי לכל חלוקה T של [a,b] עם $\lambda(T) < \delta$ מתקיים :

$\sum_{i=1}^{n} \omega_{f,i}\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\omega_{f_{n,i}} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_{f_{n,i}}\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon$ ולכן לפי הקריטריון של רימן f(x) אינטגרבילית בקטע [a,b].

1 ו3. יהי $\varepsilon > 0$ נתון. לפי ההנחה של התכנסות במ״ש קיים n כך שלכל $n \geq N$ ולכל $t \in [a,b]$ מתקיים $|f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. נגדיר כעת פונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. לפי סעיף ב׳ שהוכחנו הפונקציה F(x) אגן מוגדרת. צריך להוכיח שהסדרה $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש לגבול F(x). לכל $n \geq N$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים $|F(x) - F_n(x)| = \left|\int_a^x \big(f(t) - f_n(t)\big)dt\right| \leq \int_a^x |f(t) - f_n(t)|dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \varepsilon$ ולכן ע״פ הגדרה הסדרה $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש לפונקציה הגבולית F(x). מ.ש.ל. ■

ט. משפט: אם סדרה של פונקציות רציפות שמתכנסת במ״ש אזי הפונקציה הגבולית גם רציפה.

נניח כי כל הפונקציות $f_n(x)$ רציפות בקטע I. ונניח כי הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש. וצריך להוכיח כי הפונקציה הגבולית f(x) גם כן רציפה בו.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. רוצים להוכיח שלכל $x_0 \in I$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I$ כך ש $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. כיוון שהסדרה $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש , קיים N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $x \in I$ מתקיים $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

נקבע איזשהו $n \geq N$ יהי $x_0 \in I$. לפי ההנחה $f_n(x)$ רציפה, ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

וכעת יהי $x \in I$ נקודה כך ש $|x - x_0| < \varepsilon$ אזי:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ולכן f(x) רציפה בנקודה x_0 לכל $x_0 \in I$ ולכן f(x) רציפה בכל I. מ.ש.ל. ■

י. משפט: קיום וחישוב של רדיוס ההתכנסות של טור חזקות.

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ טור חזקות כלשהו ונגדיר $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|}}$ (רדיוס ההתכנסות). אזי:

1. אם $|x - x_0| < R$ מתקיים, הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $|x - x_0| > R$ מתקיים, הטור מתבדר.
3. אם $0 < r < R$ אז הטור מתכנס במ״ש בקטע $[x_0 - r, x_0 + r]$.

הוכחה:

1. יהי x כך ש$|x - x_0| < R$. נבחר P כך ש$|x - x_0| < P < R$ ומכאן ש $\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{P}$ וע״פ הגדרה קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים כי $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| < \frac{|x-x_0|}{P} < 1$ ולכן $|a_n||x - x_0|^n < \left(\frac{|x-x_0|}{P}\right)^n < 1$ מכאן שמדובר בכך ש $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|x-x_0|}{P}\right)^n$ טור הנדסי ש שמתכנס, וע״פ מבחן ההשוואה גם $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x - x_0|^n$ מתכנס. ז״א, הטור המקורי מתכנס בהחלט בנקודה x.

2. כעת נבחר $|x-x_0|=P$. לפי נתון $\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}>\frac{1}{P}$ ולכן יש אינסוף אינדקסים כך ש$\sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0|>\frac{|x-x_0|}{P}>1$ ואז ברור כי$|a_n||x-x_0|^n>1$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$ מתבדר (האיבר הכללי לא שואף לאפס)

3. נבחר P כך ש0<r<P<R כמו בסעיף 1, קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{P}$ ועבור $|x-x_0|\leq r$ מתקיים כי $|a_n||x-x_0|^n<\left(\frac{r}{P}\right)^n$ ומצאנו חסם לכל איבר n בטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$. בגלל שסכום החסמים $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{P}\right)^n$ הוא טור הנדסי מתכנס נקבל ממבחן הM של ויירשטראס ש$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$ מתכנס במ"ש בקטע $[x_0-r,x_0+r]$.

מ.ש.ל. ■

יא. משפט: כל טור חזקות בעל רדיוס התכנסות חיובי הינו טור טיילור של הסכום שלו.

הוכחה: ראשית ידוע כי הטור הוא חזקות ולכן נראה כך: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. ע"י גזירה איבר איבר (וזה מותר כי יש לו רדיוס התכנסות חיובי, ואז אפשר לגזור על אותן נקודות שברדיוס ההתכנסות שלו) ניתן לפתח נוסחה לנגזרת הkית, שנתונה ע"י $f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-x_0)^{n-k}$. כעת, נבחר $x=x_0$ ונקבל שכל האיברים מתאפסים פרט למקרה בו n=k. ז"א $f^{(k)}(x_0)=k!\,a_k$ ואז $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. וקיבלנו את הדרוש. מ.ש.ל. ■

<u>לגבי ההוכחה למשפט 11 אין אני כל כך בטוח.</u>

<u>יכול להיות שגם צריך להוכיח כי הנגזרת אכן ניתנת להצגה כך.</u>

בהצלחה לכולנו !!!