

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, אזי היא סדרת קושי.

(ב) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אזי היא חסומה.

2. תהי (a_n) סדרה ויהי $0 < p < 1$ מס' ממשי. נתון כי לכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים: $|a_n - a_{n-1}| < p^n$. הראו כי (a_n) היא סדרת קושי.

3. מיצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{ב})$$

4. א. הראו לפי הגדרה כי הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,5)$.
 ב. אם הייתם מנסים להראות כי הפונקציה רציפה במידה שווה בקטע $(-5,5)$, היכן הוכחתם מסעיף א' היתה נכשלת?
 ג. השתמשו במשפט קנטור כדי להראות כי הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,5)$ (שימו לב כי הקטע פתוח).

ד. אם הייתם מנסים להראות כי הפונקציה רציפה במידה שווה בקטע $(-5,5)$, היכן הוכחתם מסעיף ג' היתה נכשלת?

5. הראו כי הפונקציות הבאות לא רציפות במידה שווה בקטע $(0,1)$:

$$\text{א. } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{ב. } f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

6. יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות במידה שווה ב- \mathbb{R} . הוכיחו או הפריכו:
 א. המכפלה $f(x)g(x)$ רציפה במידה שווה ב- \mathbb{R} .
 ב. ההרכבה $f(g(x))$ רציפה במידה שווה ב- \mathbb{R} .

7. האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים?

(א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3n + 4}}$$

(ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + n^2}$$

(ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n}$$

8. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מתכנס?

רמז: חשבו ישירות את סדרת הסכומים החלקיים S_n . כל האיברים מצטמצמים חוץ מהאחרון. הסיקו כי $S_n \rightarrow \infty$.

9. נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

א. נסו לקבוע על סמך מבחן המנה האם הטור מתכנס או מתבדר. מה מסקנתכם?

ב. אם פתרתם נכונה את סעיף א', הסקתם כי לא ניתן להשתמש במבחן המנה כדי להחליט האם הטור הנתון מתכנס או מתבדר. הראו בדרך אחרת כי הוא מתבדר. רמז: הראו כי a_n לא שואפת ל-0 ולכן הטור מתבדר.

רמז לרמז: $a_1 = e$, וכן a_n מונוטונית עולה (הסתכלו על $\frac{a_{n+1}}{a_n}$).

10. האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי, או מתבדרים?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad (\aleph)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n + 1}} \quad (\beth)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \quad (\gimel)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4 - 3n^2}} \quad (\daleth)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5777}}{(\ln \pi)^n} \quad (\hept)$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ עבור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)^n}{n!} \quad (\varepsilon)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^n} \quad (\zeta)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} \quad (\eta)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (\theta)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}} \quad (\iota)$$