עוצמת הטבעיים

הגדרה

- העוצמה של הטבעיים מסומנת $\aleph_0$
- קבוצה A המקיימת $|A| \leq \aleph_0$ נקראת **בת מנייה** (מקור השם כי ניתן למנות/ למספר את האיברים בה ע"י התאמה חח"ע ועל מהטבעיים במקרה האין סופי או במקרה הסופי פשוט למספר עד n)

טענה $B = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$ קבוצת האי זוגיים היא בת מנייה

הוכחה : נגדיר פונקציה $B \to \mathbb{N} : f$ ע"י $n \mapsto 2n - 1$

טענה $C = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצת הטבעיים עם 0 בת מנייה

הוכחה : נגדיר פונקציה $C \to \mathbb{N} : f$ ע"י $n \mapsto n - 1$

הוכחות באמצעות ק.ש.ב

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \rightarrow |A| = |B|$$

תרגיל

חשבו את עוצמת $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

פתרון

מצד אחד $A \subseteq \mathbb{Q}$ כלומר $|A| \leq \aleph_0$

$B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $|B| = \aleph_0$ $|B| \leq |A| \leftarrow B \subseteq A$

לפי קש"ב

$\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph_0 \longrightarrow |A| = \aleph_0$

מש"ל

תרגיל

נסמן $A=\{1,2,3,4\}$.

א. חשב את עוצמת $\overbrace{\{f\in\mathbb{N}^A : f \text{ is 1-1}\}}^{B}$. קבוצת הפונק' $f:A\to\mathbb{N}$ כאשר f חח"ע

ב. חשב את עוצמת $\underbrace{\{f\in\mathbb{N}^A : f \text{ is not 1-1}\}}_{C}$. אותו דבר רק f לא חח"ע

$h(1)=3$

$h(2)=7$

$h(3)=4$

$h(4)=2$

(א) נשים לב שנוכל לשלוח באופן חח"ע את $A\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\underset{A\to\mathbb{N}}{f}\longmapsto(f(1),f(2),f(3),f(4))$ נגדיר פונק' $g:B\to\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}_{\aleph_0}$:

$g(h)\longmapsto(3,7,4,2)$

g חח"ע $\leftarrow$ $|B|\le\aleph_0$ B אינסופית ולכן עוצמתה כמו $\aleph_0$

$\underbrace{\mathbb{N}\setminus\{1,2\dots10\}}_{\aleph_0}$ נמצא $t:B\to\mathbb{N}\setminus\{1,2..9\}$ על.

$t(f)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

$|\mathbb{N}\setminus\{1,2,\dots9\}|\le|B|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ סעיף ב' כמעט זהה.

$\aleph_0\le|B|\le\aleph_0\longrightarrow|B|=\aleph_0$ g מוגדרת אותו דבר

$t:C\to\mathbb{N}\setminus\{1,2,3\}$

<u>טענה:</u> X קבוצה, R יחס על X. הוכיחו $|X/R|\le|X|$

נזכור שיחס שקילות משרה חלוקה. $|X/R|=\{$כל מחלקות השקילות$\}$ נניח יש n

<u>דרך א':</u> בהנחת אקסיומת הבחירה נבחר נציג מכל מחלקת שקילות a_i

יש n מחלקות שקילות $A=\{a_1,\dots a_n\}$ $|A|=|X/R|$

* נכון גם כשיש אינסוף מחלקות. $f:A\to X:\ f(a_i)=a_i$

$|X/R|=|A|\le|X|$ חח"ע (לא על (אלא אם אין ביחס שוויון))

תרגיל

נסמן ב-S את קבוצת יחסי השקילות על הטבעיים

$S = \{R \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} : R \text{ is an equivalence relation}\}$.

א. הראו ש- $|S| \le |P(\mathbb{N})|$.

ב. נסמן $A = \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$, ונסמן ב-$T$ את אוסף החלוקות של הטבעיים

$T = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ is a partition of } \mathbb{N}\}$. נגדיר $f : P(A) \to T$ ע"י:

$f(X) = \{X\cup\{1\}, (A\setminus X)\cup\{2\}\}$. הוכיחו שהיא חח"ע.

ג. הוכיחו $|S| = |P(\mathbb{N})|$.

(א) עבור בהגדרת R — $R\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $R\in P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ $\quad S\subseteq P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$|S|\le|P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|$ (פונק' ההכלה היא חח"ע)

שבוע שעבר הוכחנו: $|A|=|B| \Rightarrow |P(A)|=|P(B)|$.

$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}| \Rightarrow |P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|=P(\mathbb{N}) \Rightarrow |S|\le P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=|P(\mathbb{N})|$

מש"ל

$A=\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ $\quad T=\{$קבוצת חלוקות $\mathbb{N}\}$

$f: P(A)\to T \qquad f(\underset{X\subseteq A}{X})=\underbrace{\{X\cup\{1\},\ A\setminus X\cup\{2\}\}}_{\text{חלוקה של הטבעים.}}$

נוכיח f חח"ע. $f(X)=f(Y)$ נוכיח $X=Y$

$\{X\cup\{1\}, A\setminus X\cup\{2\}\} = \{Y\cup\{1\}, A\setminus Y\cup\{2\}\}$

מקרה 1:

$$\begin{cases} X\cup\{1\}=Y\cup\{1\} \\ A\setminus X\cup\{2\}=A\setminus Y\cup\{2\} \end{cases}$$

$X,Y\subseteq A$, $1\notin X$ $\quad 1\notin Y \Rightarrow X=Y$

באופן דומה $2\notin A\setminus Y$, $2\notin A\setminus X \Rightarrow A\setminus X=A\setminus Y \Rightarrow X=Y$

מקרה 2:

לא הגיוני $1,2\notin X$ $\quad 1,2\notin Y$ בסתירה.

$$\begin{cases} X\cup\{1\}=A\setminus Y\cup\{2\} \\ Y\cup\{1\}=A\setminus X\cup\{2\} \end{cases}$$

(ג) $f:P(A)\to T$ חח"ע $\Rightarrow$ $|P(A)|\le|T|$ (ב) $\Rightarrow$ $|A|=|\mathbb{N}|$

$|P(\mathbb{N})|=|P(A)|\le|T| \Rightarrow |P(\mathbb{N})|\le|T|$ $\qquad$ (א) $|S|\le|P(\mathbb{N})|$

$|S|\le|T|$ נראה את הכיוון ההפוך.

לפי משפט, לכל חלוקה F של קבוצה $B\neq\emptyset$ קיים יחס R על B

כך ש $F={}^{B}/_{R}$ נגדיר $g:T\to S$ $g(F)=R$ כאשר R

מקיים ${}^{\mathbb{N}}/_{R}=F$ (בדרך כלל ודברים נוספים שלמדנו על יחסים, תראו: של R יחיד)

נראה ש g חח"ע

$F_1,F_2\in T$ חלוקות של הטבעיים. $g(F_1)=g(F_2)$ כלומר קיים $R\in S$ $F_1={}^{\mathbb{N}}/_{R}=F_2$

$\Leftarrow$ $F_1=F_2$.

כלומר מצאנו $g:T\to S$ חח"ע $|T|\leq|S|$. מקודם, ראינו $|S|\leq|T|$

לפי קש"ב $|T|=|S|$ $|S|\leq|P(\mathbb{N})|\leq|T|$

$|P(\mathbb{N})|=|S|$

תרגיל

תהיינה A,B,C,D קבוצות כך ש- $|A|=|C|, |B|=|D|$. הוכיחו: $|A^B|=|C^D|$

פתרון

קיימות $g:B\to D$ $f:A\to C$ חח"ע ועל (הפיכות)

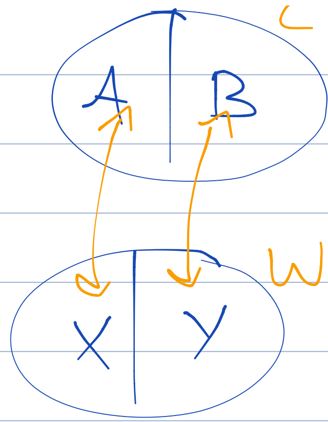
$\varphi: A^B\to C^D$

$\underset{B\to A}{h}\mapsto\underset{D\to C}{h'}$ $h'\equiv f\circ h\circ g^{-1}$

יש לבדוק - להוכיח חח"ע ועל.

טענה. יהיו C,W קבוצות ויהיו $A, B \subseteq C$,$X, Y \subseteq W$ תתי קבוצות כך ש $A \cap B = X \cap Y = \phi$ וגם $A \cup B = C$ וגם $X \cup Y = W$. אזי אם קיימות פונקציות חח"ע ועל $f : A \to X, g : B \to Y$ מתקיים ש $|C| = |W|$

הוכחה:



$$f' : C \to W$$

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

חח"ע:

$$f'(x) = f'(y)$$

נחלק למקרים:

$x, y \in A$ $f(x) = f(y)$ נתון שf חח"ע ולכן $x = y$

$x \in A, y \in B$ $f(x) = g(y)$

$\in X$ $\in Y$ אבל $X \cap Y = \phi$ בסתירה.

על:

$\omega \in W$ נחלק למקרים: $\omega \in X$ ∨ $\omega \in Y$ $W = X \cup Y$

$\omega \in X$ כיוון שf על יש מקור בA.

$\omega \in Y$ כיוון שg על יש מקור בB

הוכיחו/הפריכו:

א) $|A|=|B|$ אז $|A\setminus B|=|B\setminus A|$

ב) $|A\setminus B|=|A|$ אז $|B|<|A|$

א) $B=\mathbb{Z}$ $A=\mathbb{N}$ $|A\setminus B|=|\mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}|=|\emptyset|=0$

$|B\setminus A|=|\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}^-|=\aleph_0$

ב) $B=\{1\}$ $A=\{2,3\}$ $|B|>|A|$

$|A\setminus B|=|A|$

$B=\mathbb{N}$ $A=\mathbb{Z}$ $A\setminus B=\mathbb{Z}^-$

$|A\setminus B|=|A|=\aleph_0$

אך $|A|=|B|$ ולא $|B|<|A|$

תרגיל ממבחן.

א.(ב XI) יהיו A,B קבוצות כך ש $|A/B| = |B/A|$. הוכח ש $|A| = |B|$.

ב. מצא קבוצות A וB כך ש $|B| = |A|$ אבל $|A/B| \neq |B/A|$.

לפי הנתון $f: A\setminus B \to B\setminus A$ חח"ע ועל

נגדיר $g:A\to B$:

$$g(a)=\begin{cases} a & a\in B \\ f(a) & a\in A\setminus B \end{cases}$$

נראה חח"ע: $g(a_1)=g(a_2)$.

א) $a_1=a_2 \Leftarrow a_1,a_2\in B$

ב) $a_1=a_2 \Leftarrow$ חח"ע f $\quad f(a_1)=f(a_2) \Leftarrow a_1,a_2\in A\setminus B$

ג) $a_1\in B$ $a_2\in A\setminus B$ $a_1=f(a_2)$ בסתירה כי $f(a_2)\in B\setminus A$

$a_1\in A$

על: יהי $b\in B$. $g(b)=b \Leftarrow b\in A\cap B$

$b\in B\setminus A$ כיוון ש f על קיים $a\in A\setminus B$ כך ש $g(a)=f(a)=b$