3. Hessian, עקומות, עקמומיות

3.1. משטחים ריבועיים

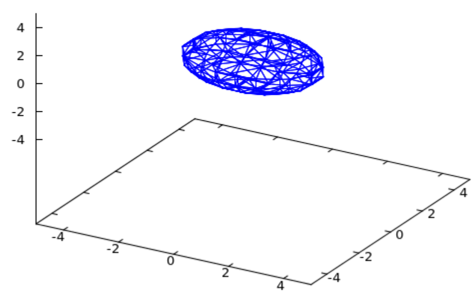
ניתן להצטמצם לצורה(בלי איברים מעורבים xy)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0 \qquad (*)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

הגדרה

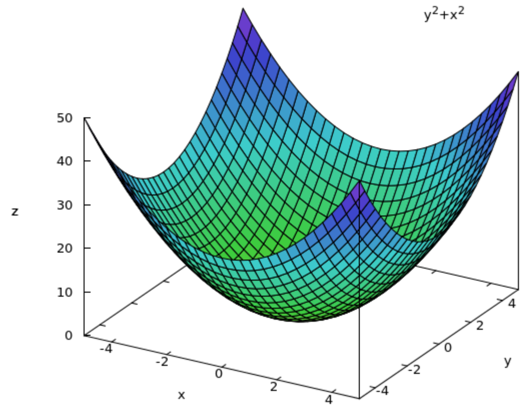
משטח נקרא <u>אליפסואיד</u> אם $a, b, c > 0$ או $a, b, c < 0$.



דוגמה - פרבולויד

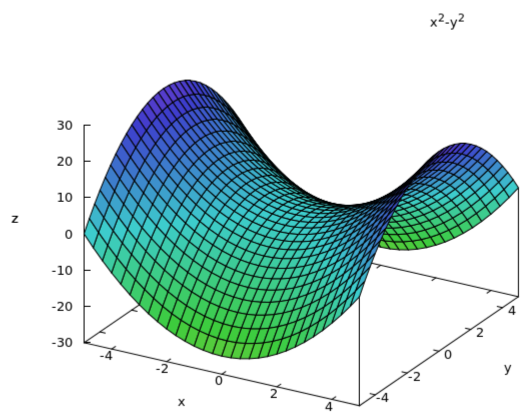
$$z = ax^2 + by^2$$

אם $a, b > 0$(פרבולויד אליפטי)



דוגמה - פרבולויד היפרבולי

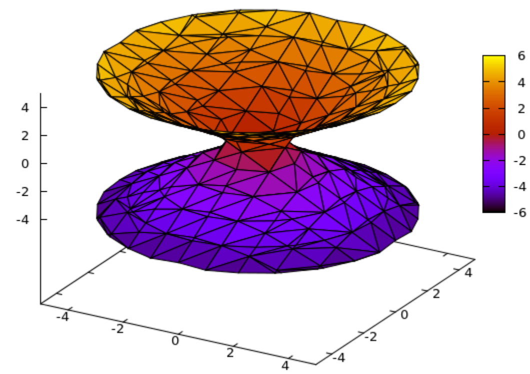
$$z = y^2 - x^2$$



הנקודה באמצע $(0, 0, 0)$ נקראת נקודת אוכף

דוגמה - היפרפרבולויד של מפה אחת

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1$$



נבדוק את האסימפטוטות

$$y=0\Rightarrow$$

$$z=\sqrt{x^2-1}$$

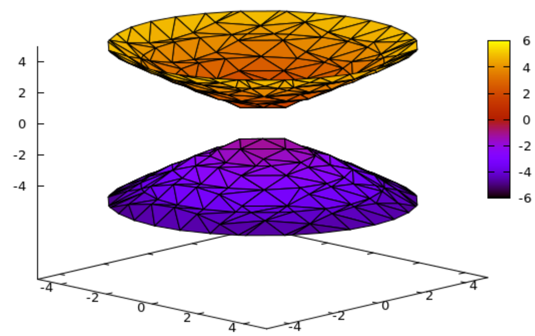
$$h\left(x\right)=x$$

$$z-h\left(x\right)=\sqrt{x^2-1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=z-h\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

דוגמה - היפרברבולואיד דו מימדי

$$z^2=x^2+y^2+1$$



זהו איחוד של שני משטחים:
$$\begin{aligned} z &= +\sqrt{x^2+y^2+1} \\ z &= -\sqrt{x^2+y^2+1} \end{aligned}$$

3.2 קריטריון של Jacobi

(משטחים ריבועיים): אם S מטריצה סימטרית 3×3, ויש משטח ריבועי

$$X^t S X + DX + k = 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

נרצה, בלי לחשב את כל הערכים העצמיים, לדעת איך המשטח אמור להראות.

הגדרה

מטריצה A, $A \in M_{n,n}$. נניח $k = 1, 2, ...n$. נסמן בΔ_k את הבלוק $k \times k$ העליון.

דוגמה

$$n = 3, k = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

אזי

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

משפט(Jacobi)

אם $A\in M_{n,n}(\mathbb{F})$ מטריצה סימטרית, נניח $\det(\Delta_k)\neq 0$ לכל $k=1,2,...n$. אזי A שקולה(חופפת) למטריצה אלכסונית

$$\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\Delta_1},\frac{\Delta_1}{\det(\Delta_2)},\frac{\det(\Delta_2)}{\det(\Delta_3)},\dots\frac{\det(\Delta_{n-1})}{\det(\Delta_n)}\right)$$

הערה: אם קיים k כך ש$\det(\Delta_k)=0$ אז אי אפשר ליישר את Jacobi.

מסקנה

תהי A מטריצה סימטרית. אזי A חיובית לחלוטין אם"ם $\det(\Delta_k)>0$ לכל k.

הגדרה - מינור

בוחרים אינדקסים $i_1,...i_k$. שומרים את כל השורות והעמודות עם אינדקסים אלה.

מסקנה

תהי A מטריצה סימטרית חיובית לחלוטין. אזי כל המינורים חיוביים לחלוטין.

דוגמה

$$x^2+zy+y^2+xz+z^2+yz+x+y+z+1=0$$

האם המשטח הוא אליפסויד:

$$S=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=x^2+2xy+y^2$$

על פי Jacobi:

$$\Delta_1=1>0$$

$$\det(\Delta_2)=\det\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$$

$$\det(\Delta_3)=\det(A)=\det\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$$

לכן המשטח הוא אליפסויד.

3.3. Hessian, נקודות אוכף, וכו'

נניח $f \in C^2$ במספר n של משתנים $f\left(u^1, u^2, ...u^n\right)$.

הגדרה

Hessian H_f של f הוא מטריצה של נגזרות שניות

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\right)_{\substack{i=1,...n \\ j=1,...n}}$$

משפט

שוויון של נגזרות מעורבות לגבי $f \in C^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

מסקנה

H_f מטריצה סימטרית

סימונים

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$$

הערה

$$f_{ij} = f_{ji} \qquad f_{[ij]} = 0$$

$$f_{[ij]} = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}\right) = 0$$

הגדרה

נקודה p היא נקודה קריטית של f אם

$$\nabla f\left(p\right)=0$$

כאשר

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u^{1}}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial u^{n}}\end{pmatrix}$$

דוגמה

$$n=2$$

$$H_{f}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

אם $ad-bc>0$ אזי p הוא מינימום מקומי או מקסימום מקומי. אם $ad-bc<0$ אזי p נקודת אוכף.

משפט(עתידי)

אם $p\in\mathbb{R}^{2}$ היא נקודה קריטית של $f\left(x,y\right)$ אזי ערך של $H_{f}\left(p\right)$ הוא בדיוק עקמומיות של Gauss של גרף של f.

3.4. הצגה פרמטרית של עקומות

הערה: לפעמים נסמן את הצירים בתור x,y, לפעמים נסמן אותם u^{1},u^{2}

הגדרה

פרמטריזציה של עקומה היא העתקה מישר למישור

$$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2}$$

או

$$\alpha:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^{2}$$

כותבים

$$\alpha(t)=\left(\alpha^1(t),\alpha^2(t)\right)$$

כאשר $t\in[a,b]$

שינוי של פרמטריזציה

$$t=t(s)$$

מקבלים פרמטריזציה חדשה

$$\beta(s)=\alpha(t(s))$$

היא פרמטריצזיה אחרת של עקומה גאומטרית C.

3.5. הצגה סתומה של עקומה

ע"י פונקציה $F(x,y)$ כשרושמים

$$F(x,y)=0$$

כאשר $F\in C^2$.

דוגמאות

- אם $F(x,y)=x^2+y^2-r^2$ אזי נקבל מעגל ברדיוס $r>0$.
- אם $F(x,y)=y-x^2$ אזי נקבל פרבולה.
- אם $F(x,y)=x^2-y^2-1$ נקבל היפרבולה.

מעבר לפרמטריזציה

$$x^2+y^2=r^2$$

אם נניח $\begin{matrix}\alpha^1(t)=t\\ \alpha^2(t)=\sqrt{r^2-t^2}\end{matrix}$ אזי $\alpha(t)=\left(\alpha^1(t),\alpha^2(t)\right)$ נותן פרמטריזציה של חצי מעגל עליון.

פרמטריזציה אחרת:

$$\alpha(t)=(r\cos t,r\sin t)$$

3.6. משפט הפונקציה הסתומה

$$F\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}-r^{2}\qquad C_{F}=\left\{ \left(x,y\right)|F\left(x,y\right)=0\right\}$$

משפט 1

נניח ש$\nabla F\left(p\right)\neq0$ בנקודה $p\in C_{F}$. אזי קיימת פרמטריזציה $\alpha\left(t\right)=\left(\alpha^{1}\left(t\right),\alpha^{2}\left(t\right)\right)$ של עקומה C_{F} בסביבה של נקודה p.

משפט 2

נניח ש$F\left(x,y\right)$ מקיימת $\frac{\partial F}{\partial y}\left(p\right)\neq0$. אזי קיימת פרמטריזציה $y=y\left(x\right)$. במילים אחרות: $\alpha\left(t\right)=\left(t,\alpha^{2}\left(t\right)\right)$ של עקומה C_{F} בסביבה של p.

דוגמה

במקרה של מעגל $x^{2}+y^{2}=r^{2}$, אם $p=\left(r,0\right)$

$$\nabla f\left(p\right)=\begin{pmatrix}2x\\
2y
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2r\\
0
\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

לא מקיים תנאי של משפט 2

3.7. פרמטריזציה במהירות יחידה

הגדרה

פרמטריזציה $\alpha\left(t\right)$ של עקומה C נקראת <u>רגולרית</u> אם היא מקיימת $\left\Vert \alpha'\left(t\right)\right\Vert \neq0$ לכל $t\in\left[a,b\right]$.

הגדרה

פרמטריזציה במהירות יחידה היא פרמטריזציה המקיימת $\left\Vert \alpha'\left(t\right)\right\Vert =1$.
במילים אחרות,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^{1}}{\mathrm{d}t}\right)^{2}+\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^{2}}{\mathrm{d}}\right)^{2}=1$$

דוגמה - מעגל

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\alpha\left(s\right) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

$$\alpha'\left(s\right) = \left(r\cdot\frac{1}{r}\left(-\sin\frac{s}{r}\right), r\cdot\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\right)$$

$$\left\|\alpha'\left(s\right)\right\| \sqrt{\sin^2\frac{s}{r} + \cos^2\frac{s}{r}} = 1$$

3.8. עקמומיות גאודזית של עקומה

נניח ש$\alpha\left(s\right)$ היא פרמטריזציה במהירות יחידה של עקומה גיאומטרית C

הגדרה

עקמומיות $k_\alpha\left(s\right)$ של עקומה היא פונקציה

$$k_\alpha\left(s\right) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2}\right\| = \left\|\alpha''\left(s\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha^1}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha^2}{\mathrm{d}s^2}\right)^2}$$

דוגמה

מעגל $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\alpha\left(s\right) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

$$\alpha'\left(s\right) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$$

$$k_\alpha\left(s\right) = \left\|\alpha''\left(s\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right)^2} = \frac{1}{r}$$

מסקנה: $\boxed{k_\alpha=\frac{1}{r}}$ במקרה של מעגל. במקרה של מעגל זוהי פונקציה קבועה, שקטנה כשמגדילים את הרדיוס(כי ככל שמגדילים מעגל, הוא נהייה קרוב יותר לישר).

3.9. מעגל אוסקולוטרופי(Osculating) של עקומה

משפט

ניתן לבטא נגזרת שנייה של פונקציה $f\left(x\right)$, $f\in C^{2}$ ע"י 3 נקודות: $f\left(x\right)$, $f\left(x-h\right)$, $f\left(x+h\right)$ קרובות, ע"י נוסחא:

$$f''\left(x\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+h\right)+f\left(x-h\right)-2f\left(x\right)}{h^{2}}$$

הוכחה

נפתח טור טיילור:

$$f\left(x+h\right)=a+bh+\frac{c}{2}h^{2}+o\left(h^{2}\right)$$

$$\frac{f\left(x+h\right)+f\left(x-h\right)-2f\left(x\right)}{h^{2}}=\frac{a+bh+\frac{c}{2}h^{2}+o\left(h^{2}\right)+a-bh+\frac{c}{2}h^{2}+o\left(h^{2}\right)}{}=$$

$$=\frac{\frac{c}{2}h^{2}+\frac{c}{2}h^{2}+o\left(h^{2}\right)}{h^{2}}\xrightarrow[h\to0]{}f''\left(x\right)$$

הגדרה

מעגל אוסקולוטרופי של עקומה בנקודה p הוא מעגל דרך שלושה נקודות קרובות במידה אינסופית לp.

משפט

עקמומיות של עקומה בנקודה p שווה לעקמומיות של מעגל אוסקולוטרופי שלה בp.

3.10. רדיוס של עקמומיות

הגדרה

רדיוס עקמומיות בנקודה p של עקומה הוא רדיוס של מעגל אוסקולוטרופי ב-p.

משפט

אם C היא גרף של של $f(x)$, אז בנקודה קריטית x_0 של f, $k = |f''(x_0)|$.

דוגמה

$$f(x) = x^2$$

$x_0 = 0$ נקודה קריטית. $f''(0) = 2$, לכן $k = 2$.