יישומים גיאומטריים ב$\mathbb{R}^3$

נסמן:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

הגדרה

קו ב$\mathbb{R}^3$ הוא הטווח של פונקציה רציפה $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}^3$.
אם f ממח' C^1, הקו נקרא "חלק".
יהי $t_0 \in [\alpha,\beta]$, $p^0 = f(t_0)$. אזי $f'(t_0) \doteqdot \exists \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$
לכן מגדירים את $f^{'}(t_0)$ כווקטור משיק לקו הנתון בנק' t_0
זה טוב לכל מימד, לאו דווקא ל$\mathbb{R}^3$

הגדרה

משטח או יריעה(manifold) הוא הטווח של פונקציה רציפה $f:\bar{D}^{\subseteq\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^3$, כאשר $\bar{D}$ תחום סגור.

$$M \doteqdot \left\{f(s,t)\middle|(s,t)\in\bar{D}\right\}$$

s,t: פרמטרים של המשטח

הגדרה

תחום ב$\mathbb{R}^k$ הוא קבוצה פתוחה וקשירה ב$\mathbb{R}^k$. נק' p של D נקראת נקודת שפה של D אם כל סביבה של p מכילה נקודות של D ונקודות של D^c
∂D=השפה של D=אוסף כל נקודות השפה של D.
$\bar{D} = D \cup \partial D$ קב' סגורה וקשירה. קוראים ל$\bar{D}$ תחום סגור

דוגמה

פני כדור.

פרמטריזציה של המשטח

נשתמש בפרמטרים φ,θ.

$$f\left(\varphi,\theta\right)=\left(R\cos\varphi\sin\theta,R\sin\varphi\cos\theta,R\cos\theta\right)$$

$$M=\left\{ f\left(\varphi,\theta\right)|\left(\varphi,\theta\right)\in\left[0,2\pi\right]\times\left[0,\pi\right]\right\}$$

הגדרה

נניח M משטח ממח' C^{1}(ז"א: יש לו פרמטריזציה בעזרת f ממח' C^{1}) ותהי $f\left(s_{0},t_{0}\right)=p^{0}\in M$. הטווח $f\left(s,t_{0}\right)$ הוא <u>קו על המשטח</u>, $\left(s,t_{0}\right)\in\bar{D}$.

הטווח של $f\left(s_{0},t\right)$(עם $\left(s_{0},t\right)\in\bar{D}$) הוא גם כן קו על המשטח

$\left.f_{s}\left(\cdot,t_{0}\right)\right|_{s_{0}}$ ווקטור משיק לקו הראשון בנק' $\left(s_{0},t_{0}\right)$

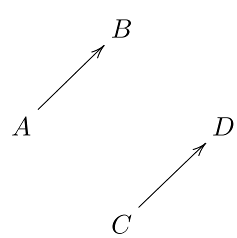
$\left.f_{t}\left(s_{0},\cdot\right)\right|_{t_{0}}$ ווקטור משיק לקו השני בנק' $\left(s_{0},t_{0}\right)$

כמה מילים על <u>אנליזה וקטורית</u>

הגדרה(גיאומטרית)

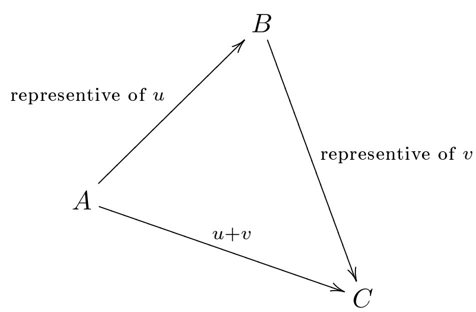
קטע <u>מכוון</u> $\overrightarrow{AB}$ $\left(A\neq B,A,B\in\mathbb{R}\right)$ הוא קטע המחבר את הנקודות A וB, מA לB.

$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ נקראים <u>שקולים</u>($\sim$) אם $ABDC$ הוא מקבילית



מחלקת שקילות של היחס הזה נקראת וקטור u(כל קטע מכוון במח' השקילות u <u>מייצג את u</u>)

לכל וקטור u יש נציג המתחיל בראשית 0. $\overrightarrow{0X}$ נציג של u. קוראים ל$\overrightarrow{0X}$ <u>וקטור המקום</u> של X



$u+v$ הוא מחלקת השקילות של $\overrightarrow{AC}$("משולש הכוחות") הווקטורים מהווים חבורה(חלופית לגבי החיבור)

וקטור ה0 מיוצג ע"י כל קטע מנוון $\overrightarrow{AA}$.

u מיוצג ע"י $\overrightarrow{AB}$

v מיוצג ע"י $\overrightarrow{BA}$

$u+(-u)=0$

$t>0$: tu מיוצג ע"י וקטור על הישר הנקבע ע"י $\overrightarrow{AB}$ כך שאורכו הוא t כפול האורך של $\overrightarrow{AB}$(עם אותו כיוון).

$$\left\|\overrightarrow{AB'}\right\| = t\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

עבור $t<0$,

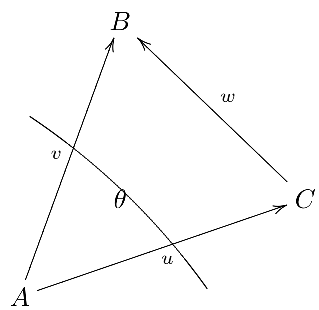
$$tu \doteqdot (-t)(-u)$$

$$0u \doteqdot 0$$

האקסיומות של מרחב וקטורי מתקיימות עבור מרכב כל ה"וקטורים" ב$\mathbb{R}^3$, עם הפעולות הנ"ל של + וכפל בסקלר ממשי.

מכפלה פנימית של u, v

ניקח נציגים עם אותה נקודת התחלה



$$u \cdot v \doteqdot \|u\| \|v\| \cos\theta$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ABC,

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos\theta}$$

$$w = v - u$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \|w\|^2 = \|v-u\|^2 = (v-u)(v-u) = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2u \cdot v$$

ההגדרה הגיאומטרית: $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$ - אותוההגדרה האלגברית.

מכפלה וקטורית

הגדרה

u, v נתונים.

$$u \times v \doteqdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

זוהי דטרמיננטה "סימלית", כאשר

$$i = (1,0,0) \doteqdot e^1$$
$$j = (0,1,0) \doteqdot e^2$$
$$k = (0,0,1) \doteqdot e^3$$

והיא נקראת המכפלה הוקטורית של u ו-v)

דוגמה

$$(2,4,-2)\times(5,1,6)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}=26i-22j-18k$$

תכונות

מתכונות הדטרמיננטה כפונקציה של שורותיה, מקבלים:

1. $u\times v$ פונקציה בילינארית של u ב-v.

$$(u+u')\times(v)=u\times v+u'\times v$$

2. $u\times v=-v\times u$
3. $u\times u=0$
4.

$$\begin{cases} i\times j=k \\ j\times k=i \\ k\times i=j \end{cases}$$

לדוגמה

$$i\times j=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=k$$

5.

$$w\cdot(u\times v)=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

לכן

$$u\cdot(u\times v)=0$$

$$v\cdot(u\times v)=0$$

לכן: אם $u\times v\neq 0$, הווקטור $u\times v$ ניצב למרכיביו.

כלומר

אם u,v אינם על ישר אחד, אזי $u \times v$ <u>ניצב</u> למישור הנקבע ע"י u ו-v. ז"א $u \times v$ הוא "נורמל" למישור.

שטח

$$S = \|u\| \left(\|v\| \sin\theta\right)$$

$$S^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2\theta = \|u\|^2 \|v\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) = \|u\|^2 \|v\|^2 - \left[\underbrace{\|u\| \|v\| \cos\theta}_{u \cdot v}\right]^2$$

$$\boxed{S^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2}$$

$$= \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) - \left(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\right)$$

$$= ... = \|u \times v\|^2$$

$$S = \|u \times v\|$$