זיווגים

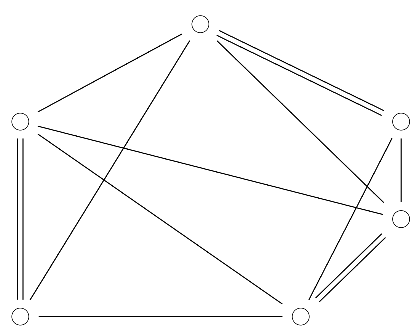
סימון

תהי $G=(V,E)$ וזיווג $M\subseteq E$. נסמן ב$V(M)$ את קודקודי M, כלומר $V(M)=\{v\in V|\exists(u,v)\in M\}$.

הגדרה

תהי $G=(V,E)$ וזיווג $M\subseteq E$.
M נקרא <u>מושלם</u> אם $V(M)=V$

דוגמה



הערה

זיווג מושלם $M\subseteq E$ לגרף $G=(V,E)$ גודלו $|M|=\frac{|V|}{2}$

משפט Hall

תהי $G=(V,E)$ גרף דו-חלקי עם חלוקה $V_1\uplus V_2$ לV כך ש$|V_1|=|V_2|$.
יש בG זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ $\forall_{s\subseteq V_1}|S|\le|N(S)|$
כאשר $N(S)$=שכני S.

הוכחה

(⇐) נתון שיש זיווג מושלם, לכן לכל $S \subseteq V$ נסמן ב$X = \{u \in V_2 | (v,u) \in M, v \in S\}$.
כיוון שM זיווג, $|S| = |X|$. אבל $X \subseteq N(S)$ ולכן $|S| \le |N(S)|$.

(⇒) באינדוקציה על $|V_1|$.

<u>בסיס</u>: $|V_2| = |V_1| = 1 \Leftarrow |V_1| = 1$.
מהתנאי $|S| \le |N(S)|$ עבור $S = V_1$ מתחייב שיש קשת בין הקודקוד של V_1 והקודקוד של V_2 וזה זיווג מושלם.

נניח נכונות המשפט ל$k < n$ ונוכיח נכונות לn.
מפרידים ל2 מקרים:

<u>מקרה 1</u>: $\forall_{S \subsetneq V_1} |S| < |N(S)|$

<u>מקרה 2</u>: $\exists_{S \subsetneq V_1} |S| = |N(S)|$

<u>נתבונן במקרה 1</u>: נבחר קשת $(u,v) \in E$ שרירותית $(v \in V_1, u \in V_2)$. ניצור גרף $G' = (V', F')$ כאשר $V_1' = V_1 - \{u\}$, $V_2' = V_2 - \{v\}$, $V' = V_1' \uplus V_2'$ ו $E = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} x \in V_1' \\ y \in V_2' \end{array} \right\}$.
נרצה להראות שיש זיווג מושלם בG'. לכל $S \subseteq V_1'$ נרצה להראות ש$|S| \le |N(S)|$. אבל לפי מקרה 1, $|S| < |N(S)|$ בG. אבל $V_2' = V_2 - \{u\}$ ולכן $N(S)$ בG' יכיל לכל הפחות מס' הקודקוד-ים פחות 1 מ$N(S)$ בG ($|N_{G'}(S)| \ge |N(S)| - 1$)
אבל $|S| \le |N_{G'}(S)| \Leftarrow |S| < |N_G(S)|$.
לכן, לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם בG', M'. (מ.ש.ל מקרה 1)
נסמן $M = M' \cup \{(u,v)\}$ ונקבל M זיווג מושלם לG.

<u>נתבונן במקרה 2</u>: $\exists_{A \subsetneq V_1} |A| = |N_E(A)|$. ניצור $G' = (A, N(A), E')$ כאשר $E' = \left\{ (u,v) \in \middle| \begin{array}{c} u \in A \\ v \in N(A) \end{array} \right\}$. נרצה להוכיח שיש זיווג מושלם בG'.
יהי $S \subseteq A$. כיוון ש$S \subseteq A$, $N_G(S) \subseteq N_G(A)$ ולכן $N_{G'}(S) = N_G(S)$ ולכן $|S| \le |N_G(S)| = |N_{G'}(S)|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, יש זיווג מושלם M' בG'.
ניצור $G'' = (V_1 - A, V_2 - N(A), E^n)$ כאשר $E'' = \left\{ (u,v) \in \middle| \begin{array}{c} u \in V_1 - A \\ v \in V_2 - N(A) \end{array} \right\}$.
נרצה להראות שיש זיווג מושלם בG''. לכל $S \subseteq V_1 - A$ נרצה להראות ש$|S| \le |N_{G''}(S)|$.
נסמן ב$B = S \cup A$. מהנתון $|B| \le |N_G(B)|$. במילים אחרות: $\boxed{|S| + |A| = |S \cup A| \le |N(S \cup A)|}$.
מצד שני, $|N(S \cup A)| \le |N(S)| + |N(A)|$
יחד נקבל $|S| + |A| \le |N(S)| + |N(A)|$.
אבל $|N| = |N(A)|$ (מקרה 2) ולכן ב$N(S \cup A)$ יש לפחות $|S|$ קודקודים שאינם ב$N(A)$, נסמנם C.
אבל $C \subseteq N(S)$, כי כל שכני A נמצאים ב$N(A)$ $\Leftarrow$ $|S| =$

$|C| \le |N_{G'}(S)|$, ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, יש זיווג מושלם M'' בG''.

נסמן $M = M' \cup M''$ ונקבל M זיווג מושלם לG.

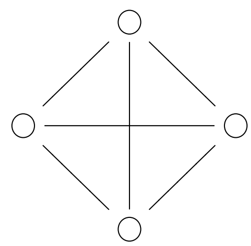
■

הגדרה

גרף $G = (V, E)$ הוא k-רגולרי אם דרגתו של כל קודקוד = k.

דוגמה

גרף 4-רגולרי:



טענה

לכל גרף דו-חלקי רגולרי יש זיווג מושלם.

הוכחה

נסמן את הגרף $G = (V_1, V_2, E)$.

$|V_1| = |V_2|$: כי יש $|V_1| \cdot k$ קשתות ומצדי שני, יש $|V_2| \cdot k$ קשתות ולכן $|V_1| \cdot k = |V_2| \cdot k$ ולכן $|V_1| = |V_2|$

לכל $S \subseteq V_1$ מספר הקשתות של S=$|S| \cdot k$.

נתבונן ב$N(S)$. $N(S)$ נוגעת ב$|N(S)| \cdot k$ קשתות כיוון שכל קשת שנוגעת בקשת מS נוגעת בקודקודו מ$N(S)$

$$|S| \cdot k \le |N(S)| \cdot k$$

$$\Downarrow$$

$$|S| \le |N(S)|$$

$\Leftarrow$ לפי משפט Hall יש זיווג מושלם בG.

■

ריבוע קסם

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N}$$

$$\exists_k \forall_i \sum_j x_{ij} = k, \sum_j x_{ji} = 2$$

דוגמה

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

אבל לא כל המספרים חייבים להיות שונים. לדוגמה:

מטריצת תמורה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

למטריצת התמורה יש קשת לזיווג מושלם - מטריצת שכנויות של זיווג מושלם היא מטריצת תמורה.

טענה

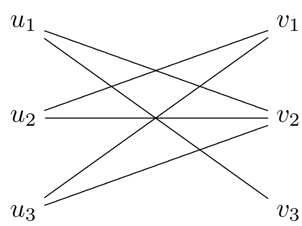
כל ריבוע קסם ניתן לפרק כסכום של מטריצת תמורות:

$$V = \sum_{i \leq n^2} n_i P_i$$

כאשר V ריבוע הקסם, n_i מספרים טבעיים, וP_i מטריצות תמורות.

הסבר

נסתכל על זיווג מושלם בגרף דו חלקי:



$$2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו ריבוע קסם, שכן בכל סיבוב ניתן להבטיח זיווג מושלם.

כמה מילים על המבחן

- יש מבחנים משנים קודמות שאמורים לעלות לקבוצה בפייסבוק.
- אין הארכות!
- חומר סגור.
- לא צריך לדעת את ההוכחות למשפטים שנלמדו בשיעור, אבל צריך להבין אותן.
- יכולות להיות שאלות על הגדרות, אז צריך לדעת להגדיר את המושגים.
- ניתן להתייחס למשפטים ואלגוריתמים שנלמדו בכיתה(למשל - "הפעל בלמן-פורד") - אין צורך לכתוב אותם שוב.
- במידה ויש שאלה של תכנות דינאמי
  - לא צריך פתרון נאיבי
  - צריך לכתוב את נוסחת הנסיגה - אבל לא צריך לכתוב את האלגוריתם שמממש אותה.
  - לא צריך הוכחת נכונות
- בדרך כלל לא מבקשים הוכחה, אלא נימוק - כלומר לא מאוד מאוד פורמאלי, מספיק לכתוב נימוק ממוקד שמסביר את האינטואיציה.