תזכורת

למכונות טיורינג יש שני סוגי זיכרון. הזיכרון הפנימי שהוא מקום אחד שעומד לרשות הCPU לזכור דברים, ושם נשמר המצב, והסרט. הפקודות של המכונה הן פונקציה שלוקחת את מה שכתוב בזיכרון הפנימי ומה שכתוב בסרט, ולפי זה מבצעת פעולות על הזיכרון הפנימי(לעבור למצב חדש) ועל הזיכרון החיצוני(לכתוב או לזוז שמאלה/ימינה).

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ac}, q_{rej})$$

הגדרה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ac}, q_{rej})$ מכונת טיורינג. קונפיגורציה של M הינה רביעיה $(q, l, x, r) \in Q \times \Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*$

נייצג את הקונפיגורציה גם ע"י המחרוזת $lqxr \in (\Gamma \cup Q)^*$.

הגדרה

תהי M מכונת טיורינג וC_1, C_2 קונפיגורציות של M. נאמר כי C_1 גוררת בצעד אחד את C_2 ע"י M ונסמן $C_1 \vdash_M C_2$ אם כאשר M נמצאת בקונפיגורציה C_1 אזי בצעד הבא M תהיה בC_2.

דוגמה

מצב	קלט	מצב חדש	äìåòô
q_0	a	q_1	b
q_0	b	q_{ac}	L
q_1	a	q_0	R
q_1	b	q_1	a
q_0	-	q_{rej}	-
q_1	-	q_{rej}	-

במכונה הזו מתקיים:

$$abq_0ab \vdash_M abq_1bb \vdash_M abq_1ab \vdash_M abaq_0b \vdash_M abq_{ac}ab$$

היחס הזה בעצם מושרה באופן ישיר מδ.

המשך הגדרה

עבור קונפיגורציות C, C' נאמר כי C גוררת את C'(או C' נובעת מC) אם כשמתחילים בקונפיגורציה C מגיעים על ידי M לC' ב0 צעדים או יותר, מספר סופי.

נסמן $C \vdash_M^* C'$.

הגדרה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{ac},q_{rej})$ מ"ט ותהי $w\in\Sigma^*$ מחרוזת. נאמר כי M מאשרת את w אם $q_0w\vdash_M^* uq_{ac}v$ עבור $u,v\in\Gamma^*$ כלשהם

נאמר כי M דוחה את w אם $q_0w\vdash_M^* uq_{rej}v$ עבור $u,v\in\Gamma^*$. נאמר כי M עוצרת על w ונסמן $M\downarrow w$ אם M מאשרת או דוחה את w.

נאמר כי M לא עוצרת על w אם M לא דוחה ולא מאשרת את w ונסמן $M\uparrow w$.

הגדרה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{ac},q_{rej})$ מכונת טיורינג, ותהי $L\subseteq\Sigma$ שפה. נאמר כי M מכריעה את L[1] אם לכל $w\in\Sigma^*$, אם $w\in L$ אז M מאשרת את w, ואם $w\notin L$ אז M דוחה את w.

נאמר כי M מזהה את L אם לכל $w\in\Sigma^*$, M מאשרת את w אמ"ם $w\in L$.[2]

עבור שפה L, נאמר כי L ניתנת להכרעה(כריעה) אם יש מ"ט M שמכריעה את L. נאמר כי L ניתנת לזיהוי אם יש מ"ט M שמזהה את L.

שאלה

האם ישנן שפות שאינן ניתנות להכרעה?

האם ישנן שפות שאינן ניתנות לזיהוי?

טענה

תהי L שפה. אם L כריעה אזי L ניתנת לזיהוי.

הוכחה

L כריעה $\Leftarrow$ קיימת מ"ט שמכריעה את L $\Leftarrow$ לכל $w\in\Sigma^*$, אם $w\in L$ אזי M מאשרת את w ואם $w\notin L$, M לא מאשרת את w $\Leftarrow$ M מזהה את L $\Leftarrow$ L ניתנת לזיהוי.

ומה לגבי הכיוון השני?

אנחנו לא יודעים איך להוכיח את הכיוון השני, אבל זה לא אומר שהוא לא נכון. כדי להוכיח שאי אפשר, לא מספיק להראות שהדרך בה חשבנו להוכיח שאפשר לא נכונה - צריך להוכיח שאי אפשר למצוא דרך שעובדת.

[1] אין כזה דבר להכריע מילה בודדת - מילה או שמאשרים או שדוחים או שלא מאשרים ולא דוחים. להכריע זה לגבי שפה שלמה

[2] אם המכונה **מכריעה** שפה, מובטח שהיא תעצור לכל קלט. אם היא **מזהה** שפה, אז עבור קלט שכן בשפה היא אומרת כן, ועבור קלט שאינו בשפה או שהיא אומרת לא, או שהיא לא עוצרת.

הגדרה

תהי $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ו$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ac}, q_{rej})$ מ"ט. נאמר כי M מחשבת את f אם לכל $w \in \Sigma_1^*$ $q_0 w \vdash_M^* q_{ac} f(w)$.

שקילות

הגדרה

יהיו M וN מכונות שמקבלות כקלט מחרוזות מתוך Σ^*. ונניח שהמושגים דחיה ואישור מוגדרים עבור M וN. נאמר כי M וN שקולות אם לכל $w \in \Sigma^*$, M מאשרת את w אמ"ם N מאשרת את w, וM דוחה את W אמ"ם N דוחה את W.

הגדרה

יהיו A וB מודלים של מכונות. כלומר A וB(כל אחת) קבוצה של מכונות. נאמר כי A לא חלש מB אם לכל $M \in B$ קיימת מכונה $N \in A$ כך שM וN שקולות. נאמר שA וB שקולות אם A לא חלש מB וB לא חלש מA.

עוד מודלים

מודל T

זה המודל הסטנדרטי - כאשר לקלט יש נקודת התחלה שמאלית, שאי אפשר להגיע שמאלה ממנה.

מודל B

יש לסרט המשך בצד שמאל, שבתחילת הפעולה מלא ברווחים.

אם מפעילים את אותן פעולות על מודלים שונים ייתכן שנקבל תוצאה שונה, בגלל שיש פעולות שונות.

אבל האם המודלים שקולים?

אם נותנים לי מכונה במודל B, האם יש מכונה אחרת במודל T שעושה אותו דבר?

טענה

המודלים T וB שקולים.

הוכחה

B לא חלש יותר מ-T:

תהי $M_T = \left(Q_T, \Sigma_T, \Gamma_T, \delta_T, q_0^T, q_{ac}^T, q_{rej}^T\right)$ מ"ט במודל T. נבנה $M_B = \left(Q_B, \Sigma_B, \Gamma_B, \delta_B, q_0^B, q_{ac}^B, q_{rej}^B\right)$ במודל B שקולה ל-M_T.

בה"כ $\$ \notin \Gamma_T$. $\Gamma_B = \Gamma_T \cup \{\$\}$. נוסיף את המצבים הבאים(השורה הראשונה משתכפלת עבור כל קלט אפשרי, והאחרונה עבור כל מצב אפשרי)

מצב	קלט	מצב חדש	äìåòô
q_0^B	α	q_1^B	L
q_1^B	$\_$	q_1^B	\$
q_1^B	\$	q_0^T	R
q	\$	q	R

אם כך, $Q_B = Q_T \cup \left\{q_0^B, q_1^B\right\}$, $q_{acc}^B = q_{ac}^T$, ו-$q_{rej}^B = a_{rej}^T$.

T לא חלש יותר מ-B:

כאן יש לנו בעיה - צריך איכשהו לבטא את הסרט האינסופי לשני הכיוונים בתוך סרט אינסופי לכיוון אחד. נקפל את הסרט, כך שכל משבצת תכיל שתי אותיות - של המכונה המקורית. כל אות של המכונה החדשה תהיה שתי אותיות של המכונה המקורית. נוסיף סימן דולר לנקודת ההתחלה כדי לזכור את נקודת הקיפול.

יהיו לנו שתי טבלאות, אחת תסמן פעולות כאשר אנו משמאל לסרט המקורי, והשניה כאשר אנו מימין(למרות שבשתיהן נפעל בצד הימני של הסרט, כי זה הצד היחיד שיש) והן יהיו שיקוף אחת של השניה. נצטרך גם לעבור בין שתי הטבלאות.

$\Sigma_T = \Sigma_G$, $\Gamma_\$ = \Gamma_B \cup \{\$\}$. $\Gamma_T = (\Gamma_B \times \Gamma_\$) \cup \Sigma_T$.

פעולות של M_T:

1. אתחול:

   (א) במיקום הראש, אם מופיעה האות α להחליף ב $\begin{matrix}\alpha\\ \$\end{matrix}$.

   (ב) לזוז ימינה עד קצה הקלט, וכל תו β להחליף ב $\begin{matrix}\beta\\ \_\end{matrix}$.

   (ג) לחזור חזרה שמאלה עד סימון \$.

המצבים של M_T יכילו שני עותקים מכל מצב של M_B. כלומר לכל מצב $a \in Q_B$ יהיה מצב $q\uparrow$ ו-$q\downarrow$ ב-Q_T. כשגומרים את האיתחול עוברים למצב $q_0\uparrow$.

נסתכל במעברים של M_B. נניח ש-$\delta_B(q,\alpha) = (p,\beta)$. אזי לכל $x \ni \Gamma_\$$ $= \delta_T\left(q\uparrow, \begin{matrix}\alpha\\ x\end{matrix}\right)$ $\left(p\uparrow, \begin{matrix}\beta\\ x\end{matrix}\right)$, ו-$\delta_T\left(q\downarrow, \begin{matrix}x\\ \alpha\end{matrix}\right) = \left(p\downarrow, \begin{matrix}x\\ \beta\end{matrix}\right)$.

אם $\delta_B(q,\alpha) = (p,\mathrm{R})$, לכל $x \in \Gamma_\$$, $\delta_T\left(q\uparrow, \begin{matrix}\alpha\\ x\end{matrix}\right) = (p\uparrow, \mathrm{R})$, $\delta_T\left(q\downarrow, \begin{matrix}x\\ \alpha\end{matrix}\right) =$ $(p\downarrow, \mathrm{L})$ ובנוסף $\delta_T\left(q\downarrow, \begin{matrix}\alpha\\ \$\end{matrix}\right) = \left(q\uparrow, \begin{matrix}\alpha\\ \$\end{matrix}\right)$.

אם $(p,\mathrm{L}) = \delta_B\left(q,\alpha\right)$, לכל $x \in \Gamma_B$, $(p\downarrow,\mathrm{R}) = \delta_T\left(q\downarrow, \begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix}\right)$, $= \delta_T\left(q\uparrow, \begin{matrix} \alpha \\ x \end{matrix}\right)$ $(p\uparrow,\mathrm{L})$ ובנוסף $(p\downarrow,\mathrm{R}) = \delta_T\left(q\uparrow, \begin{matrix} \alpha \\ \$ \end{matrix}\right)$.

<u>לשים לב</u>: אנו מפרשים את זה בתור סרט מקופל, אבל מבחינה פורמלית זה סרט חד צדדי אחד.

מכיוון שיש לנו שני מצבי אישור ושני מצבי דחייה, נבנה עוד מצב אישור שכל אחד ממצבי האישור הקודמים יעביר אליו, ואותו דבר עם מעברי הדחיה.