

תרגיל בית 11 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגשת התרגיל עד התאריך י"ח שבט ה'תשע"ו, 28.1.2016.

שאלה 1. א. מצאו כמה חבורות אבליות יש מסדר 2016 עד כדי איזומורפיזם.

ב. מצאו באופן מפורש חבורות מסדר 2016 עם כל אחד מן האקספוננטים הבאים: 126, 1008, 168.

שאלה 2. תהי $G = D_5 \times U_7$.

א. מצאו את תת-חבורת הקומוטטור G' .

ב. האבליניזציה $\bar{G} = G/G'$ היא חבורה אבלית סופית. מצאו את הצורה הקנונית שלה, כלומר מצאו מספרים d_i כך ש- $\bar{G} \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ כאשר $d_i | d_{i+1}$.

ג. האם \bar{G} איזומורפית לחבורה כפלית של שדה כלשהו?

שאלה 3. תהי G חבורה. נגדיר באופן רקורסיבי את סדרת תת-חבורות הנגזרת שלה. תהי $G^{(0)} = G$, ועבור $n > 0$ תהי $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$. למשל $G^{(1)} = G'$.

א. חבורה נקראת פתירה אם $G^{(n)} = \{e\}$ עבור n כלשהו. הוכיחו כי חבורת הייזנברג

$$H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

היא פתירה.

ב. תהי G חבורה פתירה. ה- n הקטן ביותר עבורו $G^{(n)} = \{e\}$ נקרא דרגת הפתירות של G . מצאו חבורות מדרגות הפתירות הבאות: 1, 2, 3.

ג. האם S_3 פתירה? האם S_5 פתירה? מותר להעזר בטענות שהופיעו בכיתה ללא הוכחה.

שאלה 4. הזכרו שסימנו את השדה הסופי בן q איברים ב- \mathbb{F}_q .

א. האם יש איזומורפיזם של שדות בין \mathbb{Z}_8 (עם הפעולות של חיבור וכפל מודולו 8) לבין \mathbb{F}_8 ?

ב. ציירו את סריג תת-השדות של $\mathbb{F}_{2^{30}}$.

שאלה 5. יהי $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

א. הוכיחו כי $p(x)$ אי פריק מעל \mathbb{F}_7 .

ב. הוכיחו כי $p(x)$ פריק מעל \mathbb{F}_5 .

ג. מצאו $q \neq 7$ ו- $q' \neq 5$ כך ש- $p(x)$ אי פריק מעל \mathbb{F}_q ופריק מעל $\mathbb{F}_{q'}$. (רשות: נסו לבחור q, q' שאינם ראשוניים.)

בהצלחה!