תרגול 3 מבנים אלגבריים

6 באפריל 2021

1 סדר של איבר ותת־חבורה ציקלית

הגדרה: בהינתן חבורה G, ואיבר $g \in G$ אז הסדר שלו הוא:

$$o(g) = \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = e\}$$

ואם הקבוצה הזו ריקה, אז מסמנים $o(g) = \infty$.

דוגמאות: נבחן את סדרי האיברים ב$\mathbb{Z}_6$, ולפי זה נמצא תתי־חבורות צקליות של $\mathbb{Z}_6$:

האיבר	חישובים	הסדר	תת־חבורה ציקלית
0		1	$\langle 0 \rangle = \{0\}$
1	$\underbrace{1+1}_{2}+1+1+1+1 = 6 \equiv 0(\mod 6)$	6	$\langle 1 \rangle = \{1,2,3,4,5,0\} = \mathbb{Z}_6$
2	$2+2+2 = 6 \equiv 0(\mod 6)$	3	$\langle 2 \rangle = \{2,4,0\}$
3	$3+3 = 6 \equiv 0(\mod 6)$	2	$\langle 3 \rangle = \{3,0\}$
4	$4+4+4 = 12 \equiv 0(\mod 6)$	3	$\langle 4 \rangle = \{4,2,0\}$
5	$5+5+5+5+5+5 = 30 \equiv 0(\mod 6)$	6	$\langle 5 \rangle = \{5,4,3,2,1,0\} = \mathbb{Z}_6$

2 הרחבה לגבי S_n

עד כה ראינו הצגה של תמורות בצורה מטריצית. נראה כעת הצגה בעזרת מחזורים. יהיו $i_1,\dots,i_m \in [n]$ m מספרים שונים, נגדיר את התמורה $\sigma = (i_1,\dots,i_{m-1},i_m)$ להיות:

$$\sigma(k) = \begin{cases} i_{j+1} & \exists j < m : k = i_j \\ i_1 & k = i_m \\ k & else \end{cases}$$

למשל $\sigma = (1,4,2,5) \in S_6$ מקיים:

$$(1,4,2,5)[1] = 4$$

$$(1,4,2,5)[2] = 5$$

$$(1,4,2,5)[3] = 3$$

$$(1,4,2,5)[4] = 2$$

$$(1,4,2,5)[5] = 1$$

$$(1,4,2,5)[6] = 6$$

בצורה מטריצית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

הערות:

- מחזורים ייקראו זרים אם קבוצות המספרים שלהם זרות. למשל $(1,2),(3,4)$ זרים, ואילון המחזורים $(1,2,3),(2,5)$ אינם זרים.
- הרכבת מחזורים מתבצעת ככל הרכבת פונקציות.
- מחזורים זרים מתחלפים.
- כל תמורה ניתן להציג כהרכבת מחזורים זרים. נראה דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,6,2,4)(5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1,3)(2)(4,5)(6) = (1,3)(4,5) = (4,5)(1,3)$$

- נראה דוגמא להרכבת מחזורים שאינם זרים: $(1,2,5,4) \circ (2,4,6)$

$$(1,2,5,4) \circ (2,4,6)[1] = 2$$

$$(1,2,5,4) \circ (2,4,6)[2] = 1$$

$$(1,2,5,4)\circ(2,4,6)[3]=3$$

$$(1,2,5,4)\circ(2,4,6)[4]=6$$

$$(1,2,5,4)\circ(2,4,6)[5]=4$$

$$(1,2,5,4)\circ(2,4,6)[6]=5$$

קיבלנו בסה"כ:

$$(1,2,5,4)\circ(2,4,6)=(1,2)(4,6,5)$$

- נרצה לחשב סדר של מחזור (הערה: איבר היחידה הוא תמורת הזהות, שניתן להציגה באופן הבא: $id=(1)(2)(3)\cdots(n)$). נעשה זאת ע"י דוגמא. נחשב את הסדר של $(1,3,2,5)$: נראה מה קורה כשמרכיבים אותו על עצמו:

$$(1,3,2,5)(1,3,2,5)=(1,2)(3,5)$$

$$(1,3,2,5)^3=(1,3,2,5)(1,2)(3,5)=(1,5,2,3)$$

$$(1,3,2,5)^4=(1,3,2,5)(1,5,2,3)=(1)(2)(3)(5)=id$$

המסקנה הכללית: מחזור מאורך k הוא מסדר k.

נחשב סדרי איברים מ־S_3:

תת־חבורה ציקלית	הסדר	חישובים	האיבר
	1		
$\langle(1,2)\rangle=\{(1,2),id\}$	2	$(1,2)(1,2)=id$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1,2)$
$\langle(1,3)\rangle=\{(1,3),id\}$	2		$(1,3)$
$\langle(1,2,3)\rangle=\{(1,2,3),(1,3,2),id\}$	3	$(1,2,3)^2=(1,3,2)$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3)$
$\langle(1,3,2)\rangle=\{(1,2,3),(1,3,2),id\}$	3		$(1,3,2)$
	2		$(2,3)$