שאלה 2

לכל טור, קבע אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$

ב: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

ג: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{10n+9\sin n}$

סעיף א':

הטור בערך מוחלט הוא (החל משלב מסויים)

$$\sum\frac{3n^2-62n-1}{4n^5-26n^2+7}$$

(הסבר: כיוון שהמונה והמכנה שואפים לאינסוף, החל משלב מסויים הם יהיה חיוביים)

אז אפשר להראות באמצעות מבחן ההשוואה הגבולי שטור זה חבר של

$$\sum\frac{1}{n^3}$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

סעיף ב':

דרך 1:

$$\sum\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\geq\sum\frac{1}{n}$$

ולכן מתבדר.

דרך 2 (דיי מטופשת, הבנתי בסוף) נראה שהסדרה של האיבר הכללי של הטור אינה שואפת לאפס, ועל כן הטור מתבדר.

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

נחשב את גבול המנה של הסדרה <u>בתוך</u> השורש

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{1}{e}\neq 0$$

הערה: דרך 2 טובה על מנת להוכיח כי $\sum\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$ מתבדר (כי הוא חבר של $\sum\frac{1}{n}$)

סעיף ג'

$$\sum(-1)^n \cdot \frac{1}{10n + 9\sin(n)}$$

בערך מוחלט אנחנו מקבלים

$$\sum \frac{1}{10n + 9\sin(n)} \sim \sum \frac{1}{n}$$

לכן הטור אינו מתכנס בהחלט.

כעת בדר"כ היינו מראים שהסדרה מונוטונית יורדת, ולכן עם הסימנים המתחלפים היינו מקבלים התכנסות לפי לייבניץ'.

נעשה את הטריק המרושע הבא; ראשית נביט בטור הבא:

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{10n + 9\sin(n)} - (-1)^n \cdot \frac{1}{10n} = (-1)^n \cdot \frac{10n - (10n + 9\sin(n))}{100n^2 + 90n\, sin(n)} =$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{-9\sin(n)}{100n^2 + 90n\, sin(n)}$$

הטור

$$\sum(-1)^n \cdot \frac{-18\sin(n)}{100n^2 + 90n\, sin(n)}$$

מתכנס בהחלט לפי מבחן ההשוואה גבולי עם $\sum \frac{1}{n^{1.5}}$

$$\lim \frac{|18\sin(n)|}{100n^2 + 90\, n\sin(n)} \cdot \frac{n^{1.5}}{1} = \lim \frac{\frac{|18\sin(n)|}{\sqrt{n}}}{100 + \frac{90\sin(n)}{n}} = 0$$

כיוון שהטור $\sum(-1)^n \cdot \frac{1}{10n}$ מתכנס לפי לייבניץ', נובע כי סכום הטורים מתכנס

$$\sum(-1)^n \cdot \frac{-18\sin(n)}{100n^2 + 90n\, sin(n)} + \sum(-1)^n \cdot \frac{1}{10n} = \sum\left((-1)^n \cdot \frac{-18\sin(n)}{100n^2 + 90n\, sin(n)} + (-1)^n \cdot \frac{1}{10n}\right) =$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{10n + 9\sin(n)}$$

וזה בדיוק הטור שרצינו.

סה"כ – מתכנס בתנאי.

שאלה 3

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שמתכנסת לגבול a . הוכח שאם

$$m_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

לכל $n \geq 1$, אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} m_n = a.$$

הוכחה בקישור הבא.

שאלה 5

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בכל נקודה פנימית של הקטע הזה. נניח כי $f'(c) \neq 1$ לכל $c \in (a,b)$. נקודה c נקראית נקודת שבת של הפונקציה $f(x)$ אם $f(c) = c$. הוכח כי לפונקציה $f(x)$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת בקטע $[a,b]$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - x$$

נב"ש שקיימות שתי נקודות c_1, c_2 כך ש

$$f(c_1) = c_1$$
$$f(c_2) = c_2$$

ולכן בעצם $h(c_1) = h(c_2) = 0$

ולכן לפי רול קיימת נקודה $c_1 < d < c_2$ עבורה

$$h'(d) = 0$$

כלומר

$$f'(d) - 1 = 0$$

סתירה.