תרגיל 5 אינפי 1 מדמ"ח

25 בנובמבר 2019

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}sin(n!)$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{2^n}$

4) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})$

5) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$ רמז: נוסחת הכפל המקוצר עבור חזקה 3

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$

רמז: השתמשו בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{(n-1)n}{2}$

שאלה 2

חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות באמצעות משפט הסנדוויץ:

1) $a_n=\frac{1\cdot sin(1)+2\cdot sin(2)+...+n\cdot sin(n)}{n^3}$

2) $b_n=\frac{3^n}{2^{n^2}}$

3) $c_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot....\cdot\sqrt[2^n]{2}$

הדרכה:

קודם כל רשמו את הביטוי באופן הבא: $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot...\cdot 2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}$

לאחר מכן נזכר בנוסחה לסכום הנדסי: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

נעביר 1 אגף ונקבל: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ וזו בדיוק החזקה של 2.

נציב בביטוי ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$$

כדי לחשב את הגבול, חשבו את הגבול של $2^{\frac{1}{2^n}}$ בעזרת משפט הסנדוויץ.

נסו לחסום את הביטוי על ידי שתי סדרות ששואפות לאותו הגבול.

הערה: נוסחה כללית לסכום הנדסי: $1+q+q^2+....+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

שאלה 3

הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

1) אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ ו־a_n סדרה מתכנסת אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

2) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $\frac{1}{a_n}$ שואפת ל־∞ או ל־$-\infty$

3) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

שאלה 4

הוכיחו לפי ההגדרה את הטענות הבאות:

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

2) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \infty$

3) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם $c \in \mathbb{R}$ חיובי אזי $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = \infty$