אנליזה מודרנית – תרגול 10

בהרצאה נלמד משפט לבג המקשר בין אינטגרל רימן $\int_a^b f(x)dx$ ואינטגרל לבג $\int_{[a,b]} fdm$ על קטע סגור. נוכיח בתרגול תוצאה דומה עבור האינטגרל ה"לא אמיתי" $\int_a^\infty f(x)dx$.

<u>משפט:</u> נניח כי האינטגרל הלא אמיתי של f בקרן $[a,\infty)$ מתכנס בהחלט (ז"א $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx<\infty$ וגם כמובן $\int_a^\infty f^+dx, \int_a^\infty f^-dx<\infty$) אזי f אינט' לבג בקרן $[a,\infty)$ ומתקיים

$$\int_a^\infty f(x)dx=\int_{[a,\infty)} fdm$$

<u>הוכחה:</u> נגדיר סדרת פונקציות $g_n=f^+I_{[a,a+n]}$ אזי $\{g_n\}$ סדרה מונוטונית עולה של פונקציות אי-שליליות שגבולן f^+ ומתקיים

$$\int_{[a,\infty)} f^+dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,\infty)} g_ndm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,a+n]} f^+dm=\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+n} f^+(x)dx=\int_a^\infty f^+(x)dx$$

. וכנ"ל f^- .

<u>תרגיל ("כשלון חרוץ" של משפטי פוביני וטונלי):</u>

יהיו הממ"חים $([0,1],L([0,1]),u),([0,1],P([0,1]),v)$ כאשר $u=m$ היא מידת לבג ו- $v=\#$ היא מידת הספירה, ותהי $w=u\times v=m\times\#$ מידת המכפלה של u,v . נגדיר את האלכסון $D=\{(x,y):0\le x=y\le 1\}$.

א. הוכיחו כי האלכסון D הוא מדיד במרחב המכפלה.

ב. הוכיחו כי המספרים

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} I_D(x,y)dw,\ \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D(x,y)dm(x)d\#(y),\ \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D(x,y)d\#(y)dm(x)$$

כולם שונים זה מזה.

<u>פתרון:</u>

קודם כל יש להבין מהו מלבן מדיד במרחב המדובר. התשובה היא קבוצה מהצורה $R=E\times F$ כאשר $E\subseteq[0,1]$ מדידה לבג ו- $F\subseteq[0,1]$ כלשהי. למשל $R=\left[0,\frac{1}{4}\right]\times\left\{\frac{1}{\pi},\frac{1}{2},\frac{9}{10}\right\}$ הוא מלבן מדיד, ונפחו הוא

$$|R|=m\left(\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)\cdot\#\left(\left\{\frac{1}{\pi},\frac{1}{2},\frac{9}{10}\right\}\right)=\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$$

א.עבור $\begin{matrix} n=0,1,2,3,\dots \\ k=1,2,3\dots,2^n \end{matrix}$ נגדיר קטעים. $I_{n,k}=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$. נגדיר בנוסף $B_n=\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}\times I_{n,k}$.

לכל n, B_n הוא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים (R_σ), ופשוט לראות כי $D=\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ [ניתן לצייר ציור, זה נראה כמו פיקסלים]. כלומר D מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ ולכן מדידה.

ב. כדי לחשב את המידה $w(D)$ נזכר במידה החיצונית:

$$w^*(D)=\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|R_n| : D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n, R_n \text{ are measurable rectangles}\right\}$$

יהי $\{R_n=E_n\times F_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של D ע"י מלבנים מדידים, ז"א $D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\times F_n$. נזרוק מהאוסף $\{R_n\}$ את כל המלבנים המדידים עבורם $m(E_n)=0$. נותר לנו כיסוי של חלק **לא בן-מניה** של האלכסון, $D'\subseteq\bigcup_{\substack{n=1 \\ m(E_n)>0}}^{\infty}E_n\times F_n$. הסיבה לכך היא שקבוצת שיעורי ה-x של המלבנים שהוסרו היא ממידת לבג אפס, ולכן המלבנים שנותרו מכסים תת-קבוצה של האלכסון, ששיעורי ה-x שלה מהווים קבוצה ממידת לבג חיובית (ומכאן לא בת מניה) .

בהכרח ישנו מלבן $R_{n_0}=E_{n_0}\times F_{n_0}$ באוסף הנותר, עבורו F_{n_0} אינסופית (אחרת המלבנים שנותרו לא יכולים לכסות את 'D , שקבוצת שיעורי ה-y שלה אינה בת מניה). עבור אותו המלבן $|R_{n_0}|=m(E_{n_0})\cdot\#(F_{n_0})=\infty$ ומכאן $\sum_{n=1}^{\infty}|R_n|\ge|R_{n_0}|=\infty$. כלומר, כל האיברים בקבוצה $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|R_n| : D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n, R_n \text{ are measurable rectangles}\right\}$ הם ∞ ולכן $w^*(D)$ שהוא ה-sup שלה שווה אינסוף. מכאן ניתן לחשב את האינטגרל הראשון (הכפול):

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} I_D(x,y)\,dw=w(D)=\infty$$

לגבי האינטגרלים הנשנים:

- לכל $y\in[0,1]$ קבוע, $\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,dm(x)=0$ (כי $I_D=0$ כב"מ dm) ולכן $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,dm(x)\,d\#(y)=0$.

- לכל $x\in[0,1]$ קבוע

$$\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,d\#(y)=\int_{\{x\}} I_D(x,y)\,d\#(y)+\int_{[0,1]\setminus\{x\}} I_D(x,y)\,d\#(y)=\int_{\{x\}}1\cdot d\#(y)+0=\#(\{1\})=1$$

ולכן $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,d\#(y)\,d\#(x)=\int_{[0,1]}1\cdot dm(x)=1$.

<u>תרגיל:</u> תהי $f:(\mathbb{R},L(\mathbb{R}))\to\mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dm(x)=\int_{0}^{\infty}m(\{x:|f(x)|\geq t\})\,dm(t)\ .$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{|f(x)|}1dm(t)\right]dm(x)=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}dm(t)\right]dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}dm(x)\right]dm(t)=\int_{0}^{\infty}m(\{x:|f(x)|\geq t\})\,dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x),dm(t)$ שהן שלמות ו- σ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי ה**קבוצה** $\{(x,t):|f(x)|\geq t\}$ מדידה "$L\otimes L$" .

(נשתמש בסימון $\otimes$ לסמן את σ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, ההעתקה $x\mapsto|f(x)|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|>\alpha\}=:E_\alpha\in L$. ומכאן $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:|f(x)|>\alpha\}=E_\alpha\times\mathbb{R}\in L\otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t)\mapsto|f(x)|$ מדידה $L\otimes L$.

הפונקציה $t\mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\{t\in\mathbb{R}:t>\alpha\}=:F_\alpha\in L$, ומכאן $\{(x,t):t>\alpha\}=\mathbb{R}\times F_\alpha\in L\otimes L$. הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(x,t)\mapsto|f(x)|-t$ מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק $(|f|-t)^{-1}[[0,\infty)]$ ולכן מדידה.

<u>תרגיל:</u> תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$, ונגדיר $\alpha(x)=\mu((-\infty,x])$. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(x+c)-\alpha(x)]\,dm(x)=c\mu(\mathbb{R})\ .$$

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu((-\infty,x+c])-\mu((-\infty,x])\right]dm(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu((x,x+c])dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(x,x+c]}d\mu(t)dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):x<t\le x+c\}}d\mu(t)dm(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):t>x\ge t-c\}}d\mu(t)dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):t>x\ge t-c\}}dm(x)d\mu(t)=c\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(t)=c\mu(\mathbb{R})$$

<u>אנליזה פונקציונלית:</u>

<u>תרגיל:</u> האם הפונקציות הבאות הן נורמות במרחב המצורף?

א. $X=BV([a,b])\ \ \|f\|:=T_a^b[f]$

ב. $X=BV([a,b])\ \ \|f\|:=|f(a)|+T_a^b[f]$

<u>פתרון:</u>

א. לא. האקסיומה הראשונה של הנורמה, $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$ נכשלת: **לכל** פונקציה קבועה יש השתנות טוטאלית אפס, ולא רק לפונקציית האפס. (שאר התכונות מתקיימות, ולמרחב שמקיים את תכונות 2-3 קוראים מרחב סמי-נורמי)

ב. זו כן נורמה.

- ברור שלכל f $\|f\|\ge 0$, ויש שוויון או"א $|f(a)|=T_a^b[f]=0$ (כי זהו סכום של אי-שליליים). $T_a^b[f]=0$ אומר כי הפונקציה $f\equiv c$ קבועה, ו-$|f(a)|=0$ אומר שהערך הקבוע הזה הוא 0.
- לכל $c\in\mathbb{R}$ קבוע, $f\in BV([a,b])$

$$\|cf\|=|cf(a)|+T_a^b[cf]=|c||f(a)|+|c|T_a^b[f]=|c|\|f\|$$

- לכל $f,g\in BV([a,b])$

$$\|f+g\|=|(f+g)(a)|+T_a^b[f+g]\le|f(a)|+|g(a)|+T_a^b[f]+T_a^b[g]=\|f\|+\|g\|$$