אנליזה מודרנית – תרגול 12

תזכורת: אם $(X,\|\ \|_X),(Y,\|\ \|_Y)$ מ"נ, $T:X\to Y$ העתקה לינארית, מגדירים $\|T\|=\sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}:0\neq x\in X\right\}=\sup\left\{\|T(x)\|_Y:\|x\|_X=1\right\}$. (במילים $\|T\|$ הוא גורם המתיחה המקסימלי של T). אם $\|T\|<\infty$ אומרים ש- T חסומה, ומרחב כל ההעתקות הלינאריות החסומות הוא מ"נ יחד עם הנורמה הזו.

1. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(x,y)=(-3x,2y)=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. חשבו את $\|T\|$ (הנורמות על $\mathbb{R}^2$ הן האוקלידיות)

פתרון: יש למצוא את $\sup\left\{\|(-3x,2y)\|:\sqrt{x^2+y^2}=1\right\}=\sup\left\{\|T(x,y)\|:\|(x,y)\|=1\right\}$. לצורך כך נשים לב שקבוצת הנקודות $\left\{(-3x,2y):x^2+y^2=1\right\}$ ממלאת את האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.
שכן אם $x^2+y^2=1$ אזי $\frac{(-3x)^2}{9}+\frac{(2y)^2}{4}=1$. וכל נקודה $(\bar{x},\bar{y})$ על האליפסה יכולה להיכתב בצורה $(\bar{x},\bar{y})=(3\cos\theta,2\sin\theta)$ כך ש- $(\bar{x},\bar{y})=T(-\cos\theta,\sin\theta)$ ו- $(-\cos\theta,\sin\theta)$ נמצאת על מעגל היחידה. אנו מעוניינים בנקודות מהקבוצה $\left\{(-3x,2y):x^2+y^2=1\right\}$ (כלומר מהאליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$) בעלות האורך (נורמה) הגדול ביותר. פשוט לראות שמתקבל מקסימום בנקודות $(\pm3,0)$ וערך המקסימום הוא $\|T\|=3$.

(ניתן להכליל באופן הבא: אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ לינארית ומוגדרת ע"י $T(x)=Ax$, עבור $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית, עם ע"ע $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ אזי $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$. המספר $\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ נקרא הרדיוס הספקטרלי של A ומסומן ע"י $\rho(A)$).

2. נגדיר $T:C([0,1])\to\mathbb{R}$ ע"י $T[f]=f(0)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C([0,1])$ את הנורמה הרגילה, אז T רציף, אבל אם נגדיר על $C([0,1])$ את נורמת L^2 ביחס למידת לבג, אז T לא רציף.

פתרון: נתחיל מהמקרה שעל $C([0,1])$ מוגדרת הנורמה הרגילה ($\|f\|=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|$). כדי להוכיח רציפות נסתמך על משפט מההרצאה, ונוכיח כי $\|T\|<\infty$ (כלומר T חסומה). ובכן, לכל f המקיימת $\|f\|=1$ מתקיים $\max_{0\le x\le 1}|f(x)|=1$ ולכן $|f(0)|\le 1$ או $|T[f]|\le 1$. מכאן שכל איברי הקבוצה $\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\right\}$ חסומים מלעיל ע"י אחד, ולכן $\|T\|=\sup\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\right\}\le 1<\infty$ כנדרש.

נניח כעת כי על $C([0,1])$ מוגדרת נורמת L^2 ביחס למידת לבג ($\|f\|=\left(\int_0^1|f|^2\,dm\right)^{1/2}$) ויש להפריך את הרציפות. דרך מומלצת לעשות זאת היא ע"פ היינה: נמצא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לפונקציית האפס בנורמת L^2 , אבל $T[f_n]\not\to T[0]=0$ ב- $\mathbb{R}$. ניקח סדרה כדלהלן $f_n(x):=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$. נחשב

$$\|f_n-0\|=\left(\int_0^1|f_n-0|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1|f_n|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^{1/n}|1-nx|^2\,dm(x)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^{1/n}\left(1-2nx+n^2x^2\right)dm(x)\right)^{1/2}=\left(x-nx^2+n^2\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1/n}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3n}}\to 0$$

לכל n $T[f_n]=f_n(0)=1$ ולכן $T[f_n]\to 1\neq 0$.

תזכורת: יהי X מ"ו, מ"פ על X היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:X\times X\to\mathbb{R}/\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון $\langle\alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$
- הרמיטיות $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ ב- $\mathbb{C}$ – או סימטריות $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$ ב- $\mathbb{R}$
- חיוביות $\langle v,v\rangle\ge 0$ עם שוויון $\Leftrightarrow$ $v=0$

נובע: אנטי לינאריות ברכיב השני $\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\overline{\alpha}\langle u,v\rangle+\overline{\beta}\langle u,w\rangle$ (לינאריות ב- $\mathbb{R}$)

3. הראו כי נורמת המקסימום במרחב $C([a,b])$ אינה מושרית מאף מכפלה פנימית.

פתרון: נפריך את זהות המקבילית $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$. בהרצאה הוכח שאם הנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית, אזי זהות המקבילית חייבת להתקיים.

נגדיר $f,g\in C([a,b])$ ע"י ציור [f מתחילה ב-1, ויורדת לינארית עד שמגיעה ל0 באמצע הקטע – ומשם נשארת אפס. g מתחילה ב-0, נשארת 0 עד אמצע הקטע ועולה משם לינארית עד 1].
מתקיים $\|f+g\|^2=\|f-g\|^2=\|f\|^2=\|g\|^2=1$ אם נציב בזהות המקבילית נקבל $1+1=2(1+1)$ וזה לא נכון.

4. הוכיחו כי $\langle A,B\rangle:=trace(AB^*)$ מהווה מכפלה פנימית על מרחב המטריצות המרוכבות $\mathbb{C}^{m\times n}$ (תזכורת: $B^*=\overline{A^T}$)

פתרון: נוכיח את קיום התנאים

- $$\langle \alpha A+\beta B,C\rangle=Trace\left((\alpha A+\beta B)C^*\right)=Trace\left(\alpha AC^*+\beta BC^*\right)$$ $$=Trace\left(\alpha AC^*\right)+Trace\left(\beta BC^*\right)=\alpha Trace\left(AC^*\right)+\beta Trace\left(BC^*\right)=\alpha\langle A,C\rangle+\beta\langle B,C\rangle$$
- $$\langle B,A\rangle=Trace\left(BA^*\right)=Trace\left(\left(BA^*\right)^T\right)=\overline{Trace\left(\overline{\left(BA^*\right)^T}\right)}$$ $$=\overline{Trace\left(\overline{A^{*T}B^T}\right)}=\overline{Trace\left(AB^*\right)}=\overline{\langle A,B\rangle}$$
- $$\langle A,A\rangle=Trace\left(AA^*\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(AA^*\right)_{kk}=\sum_{k=1}^{m}R_k(A)\cdot C_k\left(A^*\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\overline{a_{kl}}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|a_{kl}\right|^2\geq 0$$
  ויש שוויון או"א כל אברי המטריצה הם אפס – כלומר אם $A=0$.

5. נניח כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שייכת ל L^p עבור $p>1$ מסויים וכן גם ב L^1 . הראו כי קיימים קבועים $c>0$ ו $\alpha\in(0,1)$ כך ש

$$\int_A|f(x)|dx\leq cm(A)^\alpha$$

פתרון: מזה ש $f\in L^1$ אנחנו יודעים כי $\int_A|f(x)|dx<\infty$. מכיוון ש $f\in L^p$ עבור $p>1$ נסמן את הנורמה שלו ב $\|f\|_p=c$.עפ"י א"ש הולדר נקבל

$$\|f1_A\|_1\leq\|f\|_p\|1_A\|_q$$

$$\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}|f(x)1_A(x)|dx=\int_A|f(x)|dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}1_A(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=cm(A)^{\frac{1}{q}}$$

נותר להראות כי $\frac{1}{q}\in\left(0,1\right)$. $q=\frac{p}{p-1}>1\Rightarrow\frac{1}{q}\in\left(0,1\right)$.