תרגיל בית 7 תורת גלואה - תשע"ח

1. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל $\mathbb{Q}$:

   א. $\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}i$.

   ב. $\rho_7^2-\rho_7+2$.

2. תהיינה הרחבות גלואה סופיות $K/F, L/F$. הוכיחו כי אם $L\cap K=F$ אז $Gal\left(KL/F\right)\cong Gal(K/F)\times Gal(L/F)$.

3. תהי K/F הרחבת גלואה סופית עם חבורת גלואה אבלית. יהי $\alpha\in K$ ו $f(x)\in F[x]$ הפולינום המינימלי של α מעל F. הוכיחו כי $f(x)$ מתפצל מעל $F[\alpha]$.

4. יהי F שדה ממאפיין שונה מ2. ויהי K שדה הפיצול של פולינום ספרבילי $f(x)\in F[x]$.
   נסמן את שורשי $f(x)$ ב $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.
   הדיסקרמיננטה של $f(x)$ היא

$$\Delta(f)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

(אתם יכולים לבדוק שהדיסקרמיננטה של ax^2+bx+c זה בדיוק מה שאתם חושבים שזה).

   () הוכיחו כי $\Delta(f)\in F$.

() הוכיחו כי $K^{G_0} = F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]$ כאשר $G_0 \leq Gal(K/F)$ היא תת החבורה של התמורות הזוגיות (כלומר שאם חושבים על השיכון של $Gal(K/F)$ לתוך S_n: $G_0 = Gal(K/F) \cap A_n$).

() הסיקו כי $Gal(K/F)$ משוכנת לA_n (כלומר מורכבת רק מתמורות זוגיות אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)} \in F$.