אינפי 3 - הרצאה 2

15 בינואר 2014

חזרה: הגדרנו נורמות $p \geq 1 \quad ||\quad||_p,$ ב-$\mathbb{R}^n$.

0.1 כדורים:

בהנתן $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ נגדיר:

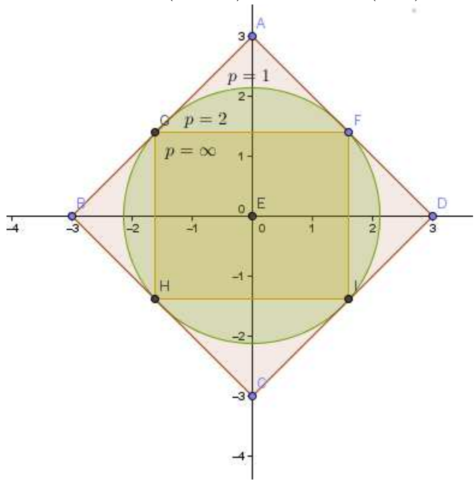
$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| < r\}$ כדור פתוח.

$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| \leq r\}$ כדור סגור.

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| = r\}$ ספירה.

0.1.1 הגדרה:

בהנתן שתי נורמות $|||\quad|||, ||\quad||$ אומרים ש$|||\quad||| \sim ||\quad||$ (שקולות) אם $\exists k, K > 0$ כך ש: $\forall x \in \mathbb{R}^n, k||x|| \leq ||x|| \leq K|||x|||$. כלומר אם $||x-a|| < K\epsilon \Leftarrow |||x-a||| < \epsilon$ ואם $x \in B_1(a, K\epsilon) \Leftarrow x \in B_2(a,\epsilon)$. ראינו עבור $||\quad||_p$ כאשר:



0.1.2 דוגמה:

$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq \sqrt{n} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \sqrt{n}||x||_\infty$ וכן $|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. ולהפך $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2} = ||x||_2$. וסה"כ $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$ דהיינו עבור $k = 1, K = \sqrt{n}$ נוכל להסיק שאכן $||\quad||_\infty \sim ||\quad||_2$.

0.1.3 משפט שנוכיח עוד כמה הרצאות:

כל שתי נורמות $|||\ |||, ||\ ||$ ב$\mathbb{R}^n$ שקולות זו לזו ($|||\ ||| \sim ||\ ||$).

0.1.4 הגדרה:

הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם קיים $M \geq 0$ כך ש$\forall x \in A, ||x|| \leq M$. במילים אחרות $A \subset \bar{B}(0, M)$.

0.1.5 הגדרה:

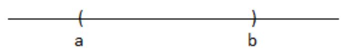
תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $a \in U$ היא נקודה פנימית אם $\exists \epsilon > 0 \text{ s.t } B(a, \epsilon) \subseteq U$. אוסף הנקודות הפנימיות יסומן כ$\mathring{U} = \text{int U=\{set of interior points\}}$.

0.1.6 הגדרה:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה אם $\mathring{U} = U$. U פתוחה $\Leftrightarrow$ כל נקודה $a \in U$ היא נקודה פנימית.

0.1.7 דוגמאות מאינפי1:

1. עבור $n = 1, U = (a, b)$.



2. $U = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. אך $[0, 1]$ לא פתוחה כיוון ש0 איננה נקודה פנימית.

0.1.8 הגדרה:

$B(a, \epsilon)$ - היא ϵ-סביבה של a. בנוסף, תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה כך ש$a \in U$ אזי U- סביבה של a.

0.1.9 הגדרה:

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא קבוצה סגורה אם $\mathbb{R}^n \setminus F$ היא קבוצה פתוחה.

0.1.10 דוגמה:

$[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה.

0.1.11 תרגיל:

הוכח ש$B(a,r)$ - קבוצה פתוחה ו$\bar{B}(a,r)$ קבוצה סגורה.

0.1.12 הוכחה:

1. צ"ל ϵ כך ש$B(x_0,\epsilon)\subseteq B(a,r)=U$. נגדיר $\epsilon=r-||x_0-a||>0$. נבדוק את הדרישה. ניקח $x\in B(x_0,\epsilon)\Rightarrow ||x-x_0||<\epsilon$. כעת $||x-a||=||(x-x_0)+(x_0-a)||\leq ||x-x_0||+||x_0-a||<\epsilon+||x_0-a||=r$. כלומר $x\in B(a,r)$ ולכן $B(x_0,\epsilon)\subseteq B(a,r)$.

2. צ"ל $\bar{B}(a,r)$ סגור $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\bar{B}(a,r)$ פתוחה. $\mathbb{R}^n-\bar{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid ||x-a||>r\}$. יהא $x_0\in\mathbb{R}^n\setminus\bar{B}(a,r)$ אזי $0<\epsilon<||x_0-a||-r$. כדי לסיים את ההוכחה מספיק להוכיח בבית ש$B(x_0,\epsilon)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\bar{B}(a,r)$.

0.1.13 אי-שיוויון משולש:

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\quad |\,||x||-||y||\,|\leq ||x-y||\leq ||x||+||y||}$$

0.1.14 הוכחה:

תחילה,

$$\begin{gathered}
||x||=||(x-y)+y||\leq ||x-y||+||y|| \\
||y||=||(y-x)+x||\leq ||y-x||+||x|| \\
||x||-||y||\leq ||x-y|| \\
||x||+||y||\leq ||x-y|| \\
-||x-y||\leq ||x||-||y||\leq ||x-y||\Rightarrow |\,||x||-||y||\,|\leq ||x-y||
\end{gathered}$$

והוכחנו את האי"ש.

0.1.15 הגדרה:

תהא $F\subseteq\mathbb{R}^n$. $p\in\mathbb{R}^n$ תקרא <u>נקודת הצטברות</u> אם $B(p,\epsilon)\cap F\neq\emptyset \quad \forall\epsilon>0$.

0.1.16 דוגמה:

בקטע $F=[0,1)\subseteq\mathbb{R}$ ישנן נקודות הצטברות ב0 וב1.

0.1.17 הגדרה:

תהי $F\subseteq\mathbb{R}^n$. $\bar{F}=\{\text{set of limit points of } F\}$ ונקראת סגור של F. $F\subseteq\bar{F}$.

0.1.18 משפט:

F סגורה אמ"ם $F=\bar{F}$.

0.1.19 הוכחה:

נניח שF סגורה כלומר $\mathbb{R}^n \setminus F$ קבוצה פתוחה. ניקח נקודה $p \in \bar{F}$. ר"ל $p \in F$. בשלילה, $p \notin F$ אזי $\mathbb{R}^n \setminus F; p \in \mathbb{R}^n \setminus F$ פתוחה ולכן $\exists \epsilon > 0 : B(p,\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus F$ ואזי $B(p,\epsilon) \cap F = \emptyset \Rightarrow p \notin \bar{F}$ וזו סתירה. באופן דומה גם בכיוון הפתוח ולכן $F = \bar{F}$.

0.1.20 הגדרה:

אם הקבוצה $F \subseteq \mathbb{R}^n$ היא:

1. F חסומה
2. F סגורה

אזי F נקראת קבוצה קומפקטית (compact).

0.1.21 דוגמאות:

1. $[1,\infty) \subset \mathbb{R}$ איננה קומפקטית. מחד, $\mathbb{R} \setminus [1,\infty) = (-\infty,1)$ - פתוחה אבל $[1,\infty)$ לא חסומה ועל כן לא קומפקטית .
2. $F = (0,1)$ לא קומפקטית.
3. $F = [1,2] \cup [3,4]$ קומפקט.

0.2 תזכורת לאלגברה ליניארית

$X_0 \in \mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי אם $\alpha x + \beta y \in X_0 \quad \forall x,y \in X_0, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

0.2.1 בסיס:

$e_1,\ldots,e_m \in X_0$ לא תלויה ליניארית וכן

$$X_0 = \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_m\} = \{x = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_m e_m : \alpha_j \in \mathbb{R}\}$$

ונסמן $m = \dim X_0$. לדוגמה: $\dim X_0 = 1$ - קו ישר וכן $X_0 = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ו$e \neq 0$ וקטור כיוון.

0.2.2 מרחבים אפינים (מישורים - affine space):

$L = x_0 + X_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ אם $e_1,\ldots,e_m$ בסיס בX_0 אזי

$$L = \{x = x_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m : \alpha_j \in \mathbb{R}\}$$

, $\dim L = 1$ ובדוגמה שלנו $L = \{x_0 + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

0.2.3 השלמה אורתגונלית לבסיס

יהא $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ ־ תת מרחב ליניארי אזי $\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$ ויתקיים $\forall x \in X_0, y \in X_0^\perp, \langle x,y\rangle = 0 \quad (x \perp y)$. $\dim X_0 = n-1$ ו$\dim X_0^\perp = 1$ קו ישר.

ν בסיס ב־$X_0^\perp$

$X_0^\perp = \{\lambda\nu : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ו$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\nu\rangle = 0\}$ כאשר $\nu = (A_1,\dots,A_n)$ כך ש$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1x_1 + \dots + A_nx_n = 0\}$ ($\dim X_0 = n-1$).

באופן כללי: $\dim X_0 = m$ אזי $\dim X_0^\perp = n-m$ כאשר $\{\nu_1,\dots,\nu_{n-m}\}$ בסיס ב $X_0^\perp$, ז"א $X_0^\perp = \text{span}\{\nu_1,\dots,\nu_{n-m}\}$. $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,v_1\rangle = \dots = \langle x,v_{n-m}\rangle = 0\}$ ו$\nu_j = (A_{1j},A_{2j},A_{3j},\dots A_{nj})$. ולבסוף

$$X_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_i = 0, j = 1,\dots,n-m\right\}$$

תת מרחב ליניארי X_0, $\dim X_0 = m$ אזי ניתן לבנות מערכת משוואות:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + \dots + A_{n1}x_n = 0 \\ \dots \\ A_{1,n-m}x_1 + A_{2,n-m}x_2 + \dots A_{n,n-m}x_n = 0 \end{cases}$$

או במילים אחרות לדרוש ש$\text{rank}(A_{ij})_{i,j=1}^{n,n-m} = n-m$

0.2.4 <u>מישור אפיני ־ אל (Hyperplane)</u>

יוגדר כ $dimL = n-1$ וכזכור $L = a + X_0, \dim X_0 = n-1$. אזי

$$x \in L \Leftrightarrow x = a + u, u \in X_0 \Leftrightarrow x - a = u \in X_0$$

לכן .

$$\langle x-a,\nu\rangle = 0, \quad \nu \in X_0^\perp \Leftarrow L = \{x \in \mathbb{R}^n : x - a \in X_0\}$$

כאשר $\nu = (A_1,\dots,A_n)$ ולבסוף נסיק $\boxed{A_1(x_1-a_1) + \dots + A_n(x_n-a_n) = 0}$ ועבור

$$C = A_1a_1 + \dots A_na_n, a = (a_1,\dots a_n)$$

יתקיים $\boxed{A_1x_1 + \dots + A_nx_n = C}$.

<u>**מקרה כללי**</u> עבור $\dim L = m$

$$\boxed{\begin{cases} A_{11}(x_1-a_1) + \dots + A_{n1}(x_n-a_n) = 0 \\ A_{1,n-m}(x_1-a_1) + \dots + A_{n,n-m}(x_n-a_n) = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{n1}x_n = c_1 \\ A_{1,n-m}x_1 + \dots + A_{n,n-m}x_n = c_{n-m} \end{cases}}$$

0.2.5 דוגמה

מישור דו מימדי ב$\mathbb{R}^3$ המוגדר ע"י משוואה ליניארית אחת:
$\dim L = 2, \quad n = 3$ אזי נוכל לתאר אותו כמערכת משוואות $2x + y + 3z = 1$.
$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ $\dim L = 1$ ואכן $\text{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

0.2.6 קו ישר ב$\mathbb{R}^n$

$L = a + X_0$ כך ש$\dim X_0 = 1$, $e \in X_0, e \neq 0$. $L = \{x = a + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned} x - a &= \lambda e \\ x_1 - a_1 &= \lambda e_1 \\ &\vdots \\ x_n - a_n &= \lambda e_n \end{aligned}$$

$$\lambda = \tfrac{x_1 - a_1}{e_1} = \cdots = \tfrac{x_n - a_n}{e_n}, \quad (e_j \neq 0)\ .$$

0.2.7 קו ישר:

$\frac{x_1-a_1}{e_1} = \cdots = \frac{x_n-a_n}{e_n}, \quad (e_j \neq 0)$

n-1 equalations $\quad A \subseteq B$

$A \subseteq B \quad A \subseteq B$

$A \not\subseteq B \quad A \neq B$