תרגול 2- פולינומים,ע"ע וע"ו

הגדרה. יהיה שדה $\mathbb{F}$ אז חוג הפולינומים שלו הוא אוסף כל הפולינומים שמקדמיו שייכים ל-$\mathbb{F}$
$$F\left[x\right]=\left\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n|n\in\mathbb{N},a_i\in\mathbb{F}\right\}$$

משפט. כל פולינום ב-$\mathbb{R}\left[x\right]$ ניתן להצגה ככפל של גורמים לינארים וריבועים.

דוגמה. x^3-1 הוא פולינום מדרגה 3 לכן ניתן להציג אותו ככפל של גורמים לינארים וריבועים, למעשה

$$x^3-1=\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

1 חילוק פולינומים

ננסה להבין איך ניתן למצוא את הפירוק של פולינום כלשהו, נתחיל בדוגמא שהצגנו.

דוגמה. x^3-1 : המספר 1 הוא שורש לפולינום הנ"ל לכן חייב להיות לו גורם לינארי מהצורה $x-1$ כעת צריך למצוא פולונים $P\left(x\right)$ כך ש-

$$x^3-1=\left(x-1\right)P\left(x\right)\Leftrightarrow P\left(x\right)=\frac{x^3-1}{x-1}$$

את זה נבצע בעזרת חילוק פולינומים.

$$\begin{array}{ll} \overline{x^3-1}| & x-1 \end{array}$$

ונשאל במה צריך להכפיל את איבר בעל החזקה הכי גדולה שבצד הימני בכדי לקבל את החזקה הכי גדולה בצד השמאלי? x^2, לכן נרשום

$$\begin{array}{ll} x^2 & \\ \overline{x^3-1}| & x-1 \end{array}$$

כעת נכפיל את $x-1$ ב-x^2 ונרשום את זה מתחת ל-x^3-1 ונחסר בניהם, בדיוק כמו בכפל ארוך.

$$\begin{array}{ll} x^2 & \\ \overline{x^3-1}| & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \\ x^2-1 & \end{array}$$

ושוב נשאל במה צריך להכפיל את איבר בעל החזקה הכי גדולה שבצד הימני בכדי לקבל את החזקה הכי גדולה בצד השמאלי? הפעם זה x, לכן נרשום

$$\begin{array}{ll} x^2+x & \\ \overline{x^3-1}| & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \\ x^2-1 & \end{array}$$

כעת נכפיל את $x-1$ ב-x ונרשום את זה מתחת ל-x^2-1 ונחסר בניהם, בדיוק כמו בכפל ארוך.

$$\begin{array}{cc} \underline{x^2+x} & \\ x^3-1| & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \\ x^2-1 & \\ \underline{x^2-x} & \\ x-1 & \end{array}$$

שוב נבצע את התהליך ונקבל

$$\begin{array}{cc} \underline{x^2+x+1} & \\ x^3-1| & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \\ x^2-1 & \\ \underline{x^2-x} & \\ x-1 & \\ \underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

סיימנו את התהליך, לכן $P(x)=x^2+x+1$

דוגמה. דוגמא נוספת, חשב את

$$\frac{x^3+3x^2+1}{x+1}$$

שלב ראשון

$$\begin{array}{cc} \underline{x^2} & \\ x^3+3x^2+1| & x+1 \\ \underline{x^3+x^2} & \\ 2x^2+1 & \end{array}$$

שלב שני

$$\begin{array}{cc} \underline{x^2+2x} & \\ x^3+3x^2+1| & x+1 \\ \underline{x^3+x^2} & \\ 2x^2+1 & \\ \underline{2x^2+2x} & \\ -2x+1 & \end{array}$$

שלב שלישי

$$\begin{array}{cc} \underline{x^2+2x-2} & \\ x^3+3x^2+1| & x+1 \\ \underline{x^3+x^2} & \\ 2x^2+1 & \\ \underline{2x^2+2x} & \\ -2x+1 & \\ \underline{-2x-2} & \\ 3 & \end{array}$$

יש לנו שארית 3 לכן

$$\frac{x^3+3x^2+1}{x+1}=x^2+2x-2+\frac{3}{x+1}$$

כדי לבדוק נוכל לבצע מכנה משותף

$$x^2+2x-2+\frac{3}{x+1}=\frac{\left(x^2+2x-2\right)(x+1)+3}{x+1}=\frac{x^3+3x^2+1}{x+1}$$

2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרה. תהי A מטריצה. אם קיים וקטור $v\neq 0$ כך ש-$Av=\lambda v$ אז λ נקרא ערך עצמי (ע"ע) ו-v נקרא וקטור עצמי (ו"ע)

הגדרה. תהי Aמטריצה ו- λ ערך עצמי אז $V_\lambda=\{v|Av=\lambda v\}$הוא המרחב העצמי של Aהשייך ל-λ.

1.2 איך מוצאים ע"ע ו"ע?

עבור $v\neq 0$ מתקיים
$Av=\lambda v \Leftrightarrow Av-\lambda v=0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)v=0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)$ לא הפיכה $\Leftrightarrow$
$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=0$.
כלומר λ הוא ע"ע של A אמ"מ $p_A(\lambda)=0$. כאשר $p_A(\lambda)=|\lambda I_n-A|$ הוא הפולינום האופני של A.

דוגמה. $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{aligned}p_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-5&-6\\3&\lambda+4\end{pmatrix}\right|\\ &= (\lambda-5)(\lambda+4)+18=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)\end{aligned}$$

ולכן $\lambda_2=-1$, $\lambda_1=2$ הם ע"ע של A.
אחרי שיודעים ע"ע - איך מוצאים ו"ע? עבור מטריצה A נניח שמצאנו ע"ע λ אזי הו"ע המתאים (לע"ע λ) מקיים

$$(A-\lambda I)v=0$$

כלומר

$$v\in N(A-\lambda I)$$

נמשיך בדוגמא: $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ $\lambda_1=2$ נמצא ו"ע מתאים. צריך למצוא

$$0\neq v\in N\left[\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right]$$

כלומר

$$v\in N\left[\begin{pmatrix}3&6\\-3&-6\end{pmatrix}\right]$$

נדרג

$$\begin{pmatrix}3&6\\-3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&6\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\in N\left[\begin{pmatrix}3&6\\-3&-6\end{pmatrix}\right]$$

ולכן הוא ו"ע המתאמים ל $\lambda_1 = 2$. אכן מתקיים

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

באותו אופן נמצא ו"ע ל $\lambda_2 = -1$. נמצא

$$v \in N \left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

נדרג

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל $\lambda_2 = -1$.

משפט. יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ ע"ע שונים ו- $v_1, v_2, \dots v_m$ ו"ע שמתאימים להם, אז $\{v_1, v_2, \dots v_m\}$ בת"ל.

הגדרה. הגדרות:

1. כמו שציינו $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ הוא הפולינום האופייני של A
2. הריבוי האלגברי של הע"ע λ_i הוא החזקה של הרכיב ה-$\lambda - \lambda_i$ בפולינום האופייני.
3. במרחב העצמי של A המתאים לעע λ הוא $V_\lambda = \{v | Av = \lambda v\} = N(\lambda I - A)$
4. הריבוי הגאומטרי של הע"ע λ_iהוא המימד של המרחב העצמי של λ_i.

משפט. הריבוי האלגברי תמיד גדול שווה מהריבוי הגאומטרי.

הגדרה. המטריצות Aו-Bנקראות דומות אם קיימת מטריצה Pכך ש-$A = P^{-1}BP$

תרגיל. הוכח שלמטריצות דומות יש אותם ע"ע

פתרון. נתבונן על הפלינום האופייני.

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I_n - A| = \left|P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}BP\right| &= \\ &= \left|P^{-1}(\lambda I_n - B)P\right| &= \\ &= \left|P^{-1}\right| |\lambda I_n - B| |P| = |\lambda I_n - B| &= f_B(\lambda) \end{aligned}$$

כלומר לשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני ובפרט אותו ע"עים