בוחן אלגברה לינארית 2 תיכונסטים תשעז

29/12/2017 כ"ט כסליו

מתרגלים: אחיה בר־און, עדי בן צבי, תמר בר־און.

- ענו על כל השאלות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- מבנה הבחינה:

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
Q3	
total	

בהצלחה!

1. [33 נק'] נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

האם A לכסינה? אם כן, מצא P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.
אם לא, מצאו P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ משולשית.
פתרון: נמצא ע"ע

$$p_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda-2\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(\lambda-1)\left[\lambda(\lambda-2)+1\right]=(\lambda-1)\left[\lambda^2-2\lambda+1\right]=(\lambda-1)^3$$

ולכן יש ע"ע בודד $\lambda=1$. נמצא את המ"ע שלו

$$V_1=N\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-s\\t\\s\end{pmatrix}\,:\,s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא v כך שמטריצה

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&|\\0&1&v\\1&0&|\end{pmatrix}$$

הפיכה. למשל

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

(היא הפיכה כי הדט' שלה = -1). כעת, בגלל ש $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ו"ע של 1 נקבל ש

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&*\end{pmatrix}$$

ולכן P שהגדרנו היא פתרון לשאלה.

2. [20 נק'] תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. נסמן את הפולינום האופיני שלה ב $p_A(\lambda)$. תהא $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת שהמטריצה $p_A(B)$ אינה הפיכה.
הוכיחו כי קיים $\lambda\in\mathbb{C}$ שהוא ע"ע גם של A וגם של B
פתרון: כיון ש A מרוכבת אזי הפ"א שלה מל"ל ולכן ניתן להציגו

$$p_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

אם

$$p_A(B)=\prod_{i=1}^{n}(B-\lambda_i I)$$

אינה הפיכה אזי קיים i כך ש $B-\lambda_i I$ אינה הפיכה (כי אם לכל i מתקיים ש $B-\lambda_i I$ הפיכה אזי $p_A(B)$ הפיכה כמכפלה של הפיכות. סתירה.)

ולכן λ_iהוא ע"ע של B כי $p_B(\lambda_i)=|\lambda_i I-B|=(-1)^n\cdot|B-\lambda_i I|=0$ וכמובן ש $p_A(\lambda_i)=0$ ולכן λ_i ע"ע משותף.

3. [7 נק' לסעיף] תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה עם ערכים עצמיים מהקבוצה $\{0,1\}$ בלבד (ייתכן כי ל A ע"ע יחיד). נסמן $\dim N(A-I)=m$. הוכיחו או הפריכו (m_A הוא הפ"מ של A ו p_A הוא הפ"א של A):

(א) הפ"א של A הוא $p_A(\lambda)=\lambda^{n-m}(\lambda-1)^m$
פתרון: כיון ש A לכסינה (ולכן הפ"א מל"ל) ו $0,1$ הם הע"ע היחידים האפשריים אזי $p_A(\lambda)=\lambda^k(\lambda-1)^t$ כאשר $k+t=n$. כיוון ש A לכסינה אזי הר"ג של 1 = לר"א של 1. ולכן כיוון שהר"ג של 1 הוא $\dim N(A-I)$ שנתון ששווה ל m ולכן $t=m$ ולכן $k=n-m$.

(ב) מתקיים $A=A^2$
פתרון: כיון ש A לכסינה $0,1$ אזי קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=D$ כאשר D אלכסונית שעל האלכסון יש רק 0 או 1. בפרט $D^2=D$(וגם $D^k=D$ לכל k טבעי) ולכן

$$A^2=\left(PDP^{-1}\right)^2=PD^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$$

(ג) קיימת מטריצה B כך ש $B^3=A$
פתרון: בסימונים של סעיף קודם

$$A^3=\left(PDP^{-1}\right)^3=PD^3P^{-1}=PDP^{-1}=A$$

ולכן אם נגדיר $B=A$ נקבל ש $B^3=A$

(ד) $rank(A)=n-m$
פתרון: לפי משפט הדרגה

$$rank(A)=n-\dim N(A)$$

כיוון ש $\dim N(A)$ שווה לר"ג של 0 = לר"א של 0 (כי A לכסינה) נקבל ששווה ל $n-m$ לפי סעיפים קודמים ולכן

$$rank(A)=n-\dim N(A)=n-(n-m)=m$$

בפרט ייתכן $rank(A)\neq n-m$ למשל אם ניקח $n=2$ ו $A=I$נקבל כי $m=\dim N(A-I)=2$ אבל $rank(A)=2\neq 2-2$

(ה) $m_A(0) = p_A(0)$

פתרון: לא נכון אם ניקח $n=2$ ו $A=I$ אז נתוני השאלה מתקיימים אבל $p_A(x) = (x-1)^2, m_A(x) = x-1$ ולכן

$$p_A(0) = 1 \neq -1 = m_A(0)$$

(ו) $m_A(1) = p_A(1)$

פתרון: אם 1 הוא ע"ע אזי שני האגפים שווים אפס. אם 1 אינו ע"ע אזי $p_A(1) = 1^n = 1 = m_A(1)$ [שימו לב שאם מטריצה לכסינה ויש לה רק ע"ע בודד =0 אזי מדובר במטריצה האפס בעצמה]

(ז) $m_A(A) = p_A(A)$

פתרון: נכון. שניהם שוות למטריצת האפס. המטריצה מאפסת את p_A בגלל קיילי המילטון ומאפסת את m_A בגלל הגדרתו.