פרק 1

קבוצות

קבוצות מספרים :

$\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ - טבעיים,

$\mathbf{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$ - טבעיים כולל אפס,

$\mathbf{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ - שלמים,

Q – רציונאליים, **R** – ממשיים, **C** – מרוכבים.

U – קבוצה אוניברסאלית, $\varnothing$ - קבוצה ריקה.

$x\in A$: איבר x שייך לקבוצה A.

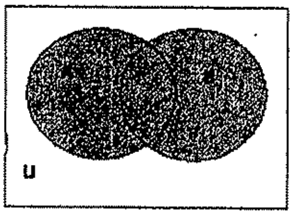
B תת-קבוצה של A אם ורק אם כל איבר של קבוצה B הוא גם איבר של קבוצה A,
מסמנים $B\subseteq A$.

אם A ו- B קבוצות סופיות ו- $B\subseteq A$ אז $|B|\le|A|$, אם $B\subset A$ אז $|B|<|A|$.

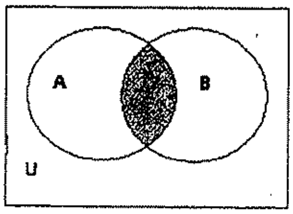
שתי קבוצות שוות אם ורק אם הן בעלות אותם איברים, כלומר
$(A=B)\Leftrightarrow(A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A)$.

הגדרות של פעולות בולאניות מעל קבוצות :

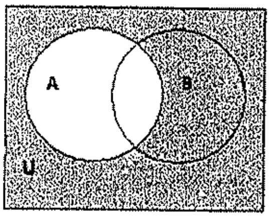
<u>איחוד</u> (union) : $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ או $x\in B$



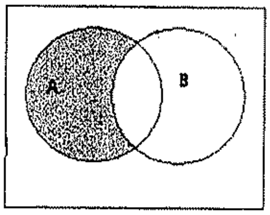
<u>חיתוך</u> (intersection) : $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$ וגם $x\in B$ -



<u>משלים</u> (complement): $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

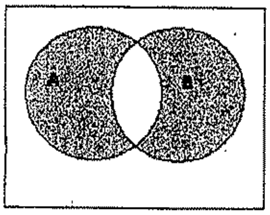


<u>הפרש</u> (relative complement): $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ וגם- $x \notin B$



<u>הפרש סימטרי</u> (symmetric difference):

$x \in A \Delta B \Leftrightarrow (x \in A$ וגם- $x \notin B)$ או $(x \in B$ וגם- $x \notin A)$ $\equiv$



$\equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

תרגילים

1.1. נתונה קבוצה $A=\{1,\{1\},\{2\}\}$. אילו מהטענות הבאות הינן נכונות:

א). $1\in A$ ב). $\{1\}\in A$ ג). $\{1\}\subseteq A$ ד). $\{\{1\}\}\subseteq A$

ה). $\{2\}\in A$ ו). $\{2\}\subseteq A$ ז). $\{\{2\}\}\subseteq A$ ח). $\{\{1,2\}\}\subseteq A$

1.2. אילו מהטענות הבאות הינן נכונות:

א). $\varnothing\in\varnothing$ ב). $\varnothing\subseteq\varnothing$ ג). $\varnothing\in\{\varnothing\}$

1.3. נתונות שש תת-קבוצות של קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}$:

$A=\{2m+1\mid m\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{2n+3\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{2p-3\mid p\in\mathbf{Z}\}$,

$D=\{3r+1\mid r\in\mathbf{Z}\}$, $E=\{3s+2\mid s\in\mathbf{Z}\}$, $F=\{3t-2\mid t\in\mathbf{Z}\}$.

אילו מהטענות הבאות הינן נכונות:

א). A=B ב). A=C ג). D= E ד). E =F

1.4. $A,B,C,D\subseteq U$. $U=\{1,2,3,\dots,10\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,4,8\}$,
$C=\{1,2,3,5,7\}$, $D=\{2,4,6,8\}$. רשום את כל אחת מהקבוצות הבאות:

א). $(A\cup B)\cap C$ ב). $A\cup(B\cap C)$ ג). $\overline{C}\cup\overline{D}$ ד). $(A\cup B)-C$

ה). $A\cup(B-C)$ ו). $(B-C)-D$ ז). $(A\cup B)-(C\cap D)$

1.5. $A,B\subseteq\mathbf{R}$. $A=[0,3]$, $B=[2,7)$. רשום את כל אחת מהקבוצות הבאות:

א). $A\cap B$ ב). $A\cup B$ ג). $\overline{A}$ ד). $B-A$ ה). $A-B$ ו). $A\Delta B$

1.6. א). $\mathrm{U}=\{a,b,c,\dots,x,y,z\}$, $A=\{a,b,c\}$, $C=\{a,b,d,e\}$, $|A\cap B|=2$,
$(A\cap B)\subset B\subset C$. מצא את קבוצה B.

ב). $\mathrm{A-B}=\{1,3,7,11\}$, $\mathrm{B-A}=\{2,6,8\}$, $\mathrm{A\cap B}=\{4,9\}$. מצא את הקבוצות A ו- B.

ג). $\mathrm{C-D}=\{1,2,4\}$, $\mathrm{D-C}=\{7,8\}$, $\mathrm{C\cup D}=\{1,2,4,5,7,8,9\}$. מצא את הקבוצות C ו- D.

1.7. $A,B,C,D\subseteq\mathbf{Z}$. $A=\{2n\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{3n\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{4n\mid n\in\mathbf{Z}\}$,
$D=\{6n\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $E=\{8n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.

1). אלו מהטענות הבאות הינן נכונות:

א). $E\subseteq C\subseteq A$ ב). $A\subseteq C\subseteq E$ ג). $B\subseteq D$ ד). $D\subseteq B$ ה). $D\subseteq A$ ו). $\overline{D}\subseteq\overline{A}$

2). מצא כל אחת מהקבוצות הבאות

א). $E\cap C$ ב). $B\cup D$ ג). $A\cap B$ ד). $B\cap D$ ה). $\overline{A}$

1.8. $A,B,C\subseteq U$.
$U=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{3,5,7,9\}$, $B=\{2,3,5,6,7\}$, $C=\{2,4,6,8\}$.
מצא:
א). $B-A$ ב). $A-B$ ג). $\overline{C}$ ד). $(A\cup B)-C$ ה). $(A\cup C)-\overline{(C-A)}$.

1.9. $A,B,C\subseteq U$. בדוק את הנכונות של הטענות הבאות באמצעות דיאגרמות ואן:
א). $A\Delta(B\cap C)=(A\Delta B)\cap(A\Delta C)$
ב). $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
ג). $A\Delta(B\cup C)=(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$
ד). $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
ה). $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$
ו). $A\cup B\cup C=(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$

1.10. P, Q ו-R קבוצות כלשהן. בדוק את הנכונות של הטענות הבאות:
א). אם P - איבר של Q ו- Q תת-קבוצה של R אזי P- איבר של R.
ב). אם P - איבר של Q ו- Q תת-קבוצה של R אזי P- תת-קבוצה של R.
ג). אם P - תת-קבוצה של Q ו- Q איבר של R אזי P- איבר של R.
ד). אם P - תת-קבוצה של Q ו - Q- איבר של R אזי P- תת-קבוצה של R.

1.11. נתון $A\subseteq B$ ו- $C\subseteq D$. הוכח את הטענות הבאות:
א). $(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$.
ב). $(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$.

1.12. $A,B,C\subseteq U$. הוכח את השוויונות הבאים:
א). $A-B=A\cap\overline{B}$.
ב). $A\cup B=A\cup(B-(A\cap B))$.
ג). $\overline{A}\cup\overline{(B\cup C)}=\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(A\cap C)}$.
ד). $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.
ה). $(A-B)-C=(A-C)-B$.
ו). $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.
ז). $A=(A-B)\cup(A\cap B)$.

1.13. נתונה קבוצה אוניברסלית $U=P([1,6])$, כלומר קבוצה של כל תת-קבוצות של הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$ ויהיו קבוצות $A=\{X\in U:1\in X \text{ וגם } \{2,3\}\not\subset X\}$, $B=\{X\in U:|X|\le 2 \text{ או } |X|\ge 5\}$.
מצא רשימת האיברים של הקבוצה $C=A\cap B$.

? or / and ?

A .1.14 היא קבוצת המלים באורך שלוש הבנויות מאותיות המלה SUBSET הכוללות לפחות S אחת ו- T אחת. B היא קבוצת המלים באורך שלוש הבנויות מאותיות המלה SHORTEST הכוללות לפחות S אחת ולפחות T אחת.סדר האותיות במלה חשוב (זאת אומרת מלים SUB ו- BUS למשל, שונות). מצא רשימת האיברים של קבוצות

א). A ב). B ג). $A \bigcap B$ ד). $A - B$

A .1.15 היא קבוצה של כל תת-קבוצות בעלות שלושה איברים של קבוצת אותיות המלה SIMPLE. B היא קבוצה של כל תת-קבוצות בעלות שלושה איברים של קבוצת אותיות המלה PRIMEL.

מצא רשימת האיברים של הקבוצות א). A ב). B ג). $A \bigcap B$ ד). $A - B$.

תשובות, רמזים ופתרונות

1.1. א). כן ב). כן ג). ~~כן~~ לא ד). כן ה). כן ו). לא ז). כן ח). לא

1.2. א). לא ב). כן ג). כן

1.3. $A=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$, $(m=-3,-2,-1,0,1,2)$
$B=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$, $(n=-4,-3,-2,-1,0,1)$
$C=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$, $(p=-1,0,1,2,3,4)$
$D=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$, $(r=-2,-1,0,1,2)$
$E=\{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$, $(s=-2,-1,0,1,2)$
$F=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$, $(t=-1,0,1,2,3)$

א). כן ב). כן ג).לא ד). לא

1.4. א). $\{1,2,3,5\}$ ב). A ג). $U-\{2\}$ ד). $\{4,8\}$ ה). $\{1,2,3,4,5,8\}$ ו). $\varnothing$
ז). $\{1,3,4,5,8\}$

1.5. א). $[2,3]$ ב). $[0,7)$ ג). $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ ד). $(3,7)$ ה). $[0,2)$
ו). $[0,2)\cup(3,7)$

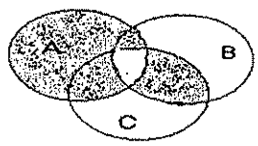
1.6. א). $B=\{a,b,d\}$ או $B=\{a,b,e\}$
ב). $A=\{1,3,4,7,9,11\}$, $B=\{2,4,6,8,9\}$
ג). $C=\{1,2,4,5,9\}$, $D=\{5,7,8,9\}$

1.7. 1). א).כן ב).לא ג).לא ד).כן ה).כן ו).לא
2). א). E ב). B ג). D ד). D ה). $\{2n+1 \mid n\in \mathbb{Z}\}$

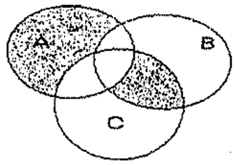
1.8. א). $\{2,6\}$ ב). $\{9\}$ ג). A ד). A ה). C

1.9. א). לא נכון

$A\Delta(B\cap C)$



$(A\Delta B)\cap(A\Delta C)$



ב).נכון ג).לא נכון ד). נכון ה). נכון ו). נכון

1.10. א). נכון ב). נכון ג).לא נכון. ד). לא נכון

דוגמה נגדית : $P=\{1,2,3\}, Q=\{1,2,3,4,5\}, R=\{A,\ B,\{1,2,3,4,5\}\}$

1.11. א). כן. הוכחה:

1). $A\subseteq B\Rightarrow n(x\in A\Rightarrow x\in B)$

2). $C\subseteq D\Rightarrow(x\in C\Rightarrow x\in D)$

$x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in A$ או $x\in C\Rightarrow x\in B$ או $x\in D\Rightarrow x\in(B\cup D)\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$

ב). כן. הוכחה דומה.

1.12. א). יש להוכיח: $A-B\subseteq A\cap\overline{B}$ ו- $A\cap\overline{B}\subseteq A-B$

1). צריך להוכיח: $x\in(A-B)\Rightarrow x\in A\cap\overline{B}$:

$$x\in(A-B)\Rightarrow x\in A\ \&\ x\notin B\Rightarrow x\in A\ \&\ x\in\overline{B}\Rightarrow x\in A\cap\overline{B}$$

2). צריך להוכיח: $x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow x\in(A-B)$:

$$x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow x\in A\ \&\ x\in\overline{B}\Rightarrow x\in A\ \&\ x\notin B\Rightarrow x\in(A-B)$$

ב).

$$A\cup(B-(A\cap B))=A\cup\left(B\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\right)=A\cup\left(B\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)=A\cup\left(\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{B}\right)\right)$$
$$=A\cup\left(\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\varnothing\right)=A\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)=(A\cup B)\cap U=A\cup B$$

ג).

$$\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(A\cap C)}\Leftrightarrow\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)\Leftrightarrow\overline{A}\cup\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)\Leftrightarrow\overline{A}\cup\overline{(B\cup C)}$$

ד).

$$(A-B)-C=(A-B)\cap\overline{C}=\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)=A-\overline{\overline{(B\cup C)}}=A-(B\cup C)$$

ה).

$$(A-B)-C=\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=A\cap\left(\overline{C}\cap\overline{B}\right)=\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\overline{B}=(A-C)-B$$

ו).

$$(A-C)-(B-C)=\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{B\cap\overline{C}}\right)=\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{\overline{C}}\right)=\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{B}\cup C\right)=$$
$$\left(\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\overline{B}\right)\cup\left(\left(A\cap\overline{C}\right)\cap C\right)=\left(A\cap\left(\overline{C}\cap\overline{B}\right)\right)\cup\left(A\cap\left(\overline{C}\cap C\right)\right)=$$
$$\left(A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)\right)\cup(A\cap\varnothing)=\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}\right)\cup\varnothing=(A-B)-C$$

ז).

$$(A-B)\cup(A\cap B)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap B)=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=A\cap U=A$$

1.13. $C=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{1,2,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\}\}$

.1.14

א).

$$A = \begin{Bmatrix} sut,\ stu,\ tus,\ tsu,\ ust,\ uts,\ sbt,\ stb,\ tbs,\ tsb,\ bst,\ bts, \\ set,\ ste,\ tes,\ tse,\ est,\ ets,\ sst,\ sts,\ tss \end{Bmatrix}$$

ב).

$$B = \begin{Bmatrix} sht,\ sth,\ ths,\ tsh,\ hst,\ hts,\ sot,\ sto,\ tos,\ tso,\ ost,\ ots,\ sst,\ sts,\ tss, \\ set,\ ste,\ tes,\ tse,\ est,\ ets, srt,\ str,\ trs,\ tsr,\ rst,\ rts,\ stt,\ tts,\ tst \end{Bmatrix}$$

ג). $A \cap B = \{set,\ ste,\ tes,\ tse,\ est,\ ets,\ sst,\ sts,\ tss\}$

ד). $A - B = \{sbt,\ stb, tbs,\ tsb, bst,\ bts, set,\ ste, tes,\ tse, est\}$

.1.15

א).

$$A = \begin{Bmatrix} \{S,I,M\},\{S,I,P\},\{S,I,L\},\{S,I,E\},\{S,M,P\},\{S,M,L\},\{S,M,E\},\{S,P,L\},\{S,P,E\},\{S,L,E\}, \\ \{I,M,P\},\{I,M,L\},\{I,M,E\},\{I,P,L\},\{I,P,E\},\{I,L,E\},\{M,P,L\},\{M,P,E\},\{M,L,E\},\{P,L,E\} \end{Bmatrix}$$

ב).

$$B = \begin{Bmatrix} \{P,R,I\},\{P,R,M\},\{P,R,E\},\{P,R,L\},\{P,I,M\},\{P,I,E\},\{P,I,L\},\{P,M,E\},\{P,M,L\},\{P,E,L\}, \\ \{R,I,M\},\{R,I,E\},\{R,I,L\},\{R,M,E\},\{R,M,L\},\{R,E,L\},\{I,M,E\},\{I,M,L\},\{I,E,L\},\{M,E,L\} \end{Bmatrix}$$

ג).

$$A \cap B = \{\{I,M,P\},\{I,M,L\},\{I,M,E\},\{I,P,L\},\{I,P,E\},\{I,L,E\},\{M,P,L\},\{M,P,E\},\{M,L,E\},\{P,L,E\}\}$$

ד).

$$A - B = \{\{S,I,M\},\{S,I,P\},\{S,I,L\},\{S,I,E\},\{S,M,P\},\{S,M,L\},\{S,M,E\},\{S,P,L\},\{S,P,E\},\{S,L,E\},\}$$

פרק 2

לוגיקה

קשרים יסודיים בלוגיקה:

שלילה	שקילות	גרירה	דיסיונקציה	קוניונקציה		
$\overline{p}$	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	q	p
0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

פסוק (proposition) ביטוי בעל משמעות שניתן ליחס לו את אחד התארים : "אמת" או "שקר" – לא את שניהם גם יחד. מסכימים ליחס לפסוק אמתי את הערך הלוגי 1, ולפסוק שיקרי את הערך הלוגי 0 .

פסוק מורכב שהוא אמיתי עבור כל הערכים של פסוקים פשוטים המופיעים בתיאורו נקרא טאוטולוגיה (tautology).

פסוק מורכב שהוא שקרי עבור כל הערכים של פסוקים פשוטים המופיעים בתיאורו נקרא סתירה (contradiction).

יהי P פרדיקט חד מקומי המוגדר מעל קבוצה אוניברסלית- U.
ביטוי $P(x)$ $\forall x$ " עבור כל x $P(x)$ " הוא פסוק אשר אמתי אם ורק אם $P(x)=\mathrm{T}$ עבור כל האיברים מהקבוצה U.
ביטוי $P(x)$ $\exists x$ " קיים x כך ש-$P(x)$ " הוא פסוק אשר אמתי אם ורק אם $P(x)=\mathrm{T}$ עבור לפחות איבר אחד מהקבוצה U.

תרגילים

2.1. אילו מהמשפטים הבאים הינם פסוקים :
א). בוש הוא הנשיא של אמריקה.
ב). $x + 3$ מספר חיובי.
ג). אלו כל בוקר היה כזה נפלא!
ד). ארבע מספר זוגי.
ה). אם $4+2=8$ אז $1+1=3$.
ו). מה השעה?
ז). מהרי יהודה עד לחופי אילת.

2.2. נתונים הפסוקים p, q, r כאשר
p : ABC משולש שווה- שוקיים
q : ABC משולש שווה- צלעות
r : ABC משולש שווה זוויות
רשום במילים את הפסוקים הבאים :
א). $q \to p$ ב). $\neg p \to \neg q$ ג). $q \leftrightarrow r$ ד). $p \wedge \neg q$ ה). $r \to p$

2.3. הגדר את ערך האמת של הפסוקים הבאים :
א). אם $4+3=12$ אזי $2+3=6$
ב). אם $3+3=6$ אזי $6+3=9$
ג). אם $3+3=6$ אזי $4+3=9$
ד). אם חיים רמון נשיא ישראל אזי $3+2=5$

2.4. בנה טבלת האמת של פסוקים הבאים והגדר אילו מהם טאוטולוגיה, אילו סתירה ואילו לא זה ולא זה :
א). $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$ ב). $p \to (q \to r)$ ג). $(p \to q) \to r$
ד). $(p \wedge q) \wedge [\neg(p \vee q)]$ ה). $[p \wedge (p \to q)] \to q$ ו). $(p \wedge q) \to p$
ז). $q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ח). $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
ט). $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ י). $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$

2.5. נתון : $p(x): x \le 3$, $q(x): x+1$ - **אי-זוגי** , $r(x): x > 0$, $x \in \mathbf{Z}$
1). אילו מהפסוקים הבאים הינם אמת :
א). $p(3) \vee [q(3) \vee \neg r(3)]$ ב). $\neg p(3) \wedge [q(3) \vee r(3)]$
ג). $p(2) \to [q(2) \to r(2)]$ ד). $[p(2) \wedge q(2)] \to r(2)$
ה). $p(0) \to [\neg q(-1) \leftrightarrow r(1)]$ ו). $[p(-1) \leftrightarrow q(-2)] \leftrightarrow r(-3)$
2). מצא את כל הערכים של x כך שהפסוק הפתוח $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ יהיה פסוק אמת.

2.6. נתון $x \in \mathbf{Z},\ p(x): x^2 = 2x$.
אילו מהפסוקים הבאים הינם אמת ואילו שקר:
א). $p(0)$ ב). $p(1)$ ג). $p(2)$ ד). $p(-2)$ ה). $\exists x\, p(x)$ ו). $\forall x\, p(x)$

2.7. x שייך לקבוצת כל המצולעים בעלי שלוש או ארבע צלעות. יהו
$a(x)$: כל הזוויות הפנימיות של x שוות
$e(x)$: x משולש שווה – צלעות
$h(x)$: כל הצלעות של x שוות
$i(x)$: x משולש שווה – שוקיים
$p(x)$: סכום הזוויות הפנימיות של x שווה ל- 180°
$q(x)$: x - מרובע
$r(x)$: x - מלבן
$s(x)$: x - ריבוע
$t(x)$: x - משולש

רשום במילים את הפסוקים הבאים והגדיר אילו מהם אמת ואילו שקר:
א). $\forall x\,[i(x) \rightarrow e(x)]$ ב). $\exists x\,[t(x) \wedge p(x)]$
ג). $\forall x\,[a(x) \rightarrow e(x)]$ ד). $\forall x\,[(a(x) \wedge t(x)) \leftrightarrow e(x)]$
ה). $\exists x\,[q(x) \wedge \neg r(x)]$ ו). $\exists x\,[r(x) \wedge \neg s(x)]$
ז). $\forall x\,[h(x) \rightarrow e(x)]$ ח). $\forall x\,[(h(x) \wedge q(x)) \rightarrow s(x)]$
ט). $\forall x\,[s(x) \leftrightarrow (a(x) \wedge h(x))]$ י). $\forall x\,[t(x) \rightarrow (a(x) \leftrightarrow h(x))]$

2.8. x מחלק של y : $x, y \in \mathbf{Z},\ p(x,y)$.
אילו מהפסוקים הבאים הם אמת ואילו שקר? במקרה של שקר תן הסבר או דוגמה נגדית:
א). $p(3,7)$ ב). $p(7,3)$ ג). $p(3,27)$ ד). $\forall y\, p(1,y)$
ה). $\forall x\, p(x,0)$ ו). $\forall x\, p(x,x)$ ז). $\forall y\, \exists x\, p(x,y)$ ח). $\exists y\, \forall x\, p(x,y)$
ט). $\forall x\, \forall y\, [(p(x,y) \wedge p(y,x)) \rightarrow (x = y)]$
י). $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)]$

2.9. נתון: $x, y \in \mathbf{Z}$, $x, y \neq 0$. אילו מהפסוקים הבאים הם אמת:
א). $\exists x\, \exists y\, [xy = 1]$ ב). $\exists x\, \forall y\, [xy = 1]$ ג). $\forall x\, \exists y\, [xy = 1]$
ד). $\forall x \forall y\, [\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y]$
ה). $\exists x\, \exists y\, [(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$
ו). $\exists x\, \exists y\, [(3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = 3)]$

2.10. אילו מהפסוקים הבאים הם אמת:

1). $\forall x\ \forall y\ p(x,y)$ 2). $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$

3). $\forall y\ \exists x\ p(x,y)$ 4). $\exists y\ \exists x\ p(x,y)$

כאשר:

א). x מחלק של y : $p(x,y)$, $x,y \in \mathbf{N}$.

ב). $x,y \in \mathbf{N}$, $p(x,y): x < y$.

ג). $x,y \in \mathbf{N}$, $p(x,y): x \le y$.

2.11. בדוק את ערך האמת של פסוקים הבאים:

א). $\forall x\ ((x \in \mathbf{R}) \rightarrow (x \in \mathbf{Q}))$

ב). $\forall x \in \mathbf{N}$ (x מספר זוגי - x ו- $x|6$)

ג). $\forall x \in \mathbf{Z}\ \ \exists y \in \mathbf{N}\ \ ((x\text{-}y) = -1)$.

2.12. הוכח באמצעות טבלאות אמת לוגיות את היחס $X \subseteq Y$, כאשר A, B, C תת-קבוצות כלשהן של קבוצה אוניברסלית- U, ו-

$X = (A \cup B) \cap \overline{C}$, $Y = \overline{(A \cap C) \cup (B \cap C)}$

2.13. הוכח באמצעות טבלאות אמת לוגיות את השוויונים:

א). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ב). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

תשובות, רמזים ופתרונות

2.1. א).כן ב).לא ג). לא ד). כן ה). כן ו).לא ז). לא

2.2. א). אם ABC משולש שווה צלעות אז הוא משולש שווה שוקיים.
ב). אם משולש ABC אינו שווה שוקיים אז הוא אינו משולש שווה צלעות.
ג). ABC משולש שווה צלעות אם ורק אם הוא משולש שווה זוויות.
ד). ABC משולש שווה שוקיים ולא משולש שווה צלעות.
ה). אם ABC משולש שווה זוויות אז הוא משולש שווה שוקיים.

2.3. א). T ב). T ג). F ד). T

2.4. א). טאווטולוגיה

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

ב). לא טאווטולוגיה ולא סתירה

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

ג). לא טאווטולוגיה ולא סתירה ד). סתירה ה). טאווטולוגיה
ו). טאווטולוגיה ז). לא טאווטולוגיה ולא סתירה
ח). טאווטולוגיה

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ט). טאווטולוגיה

י). טאווטולוגיה

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

2.5. 1). א), ג), ד), ה)　　2). $x = 2$

2.6. א).T　ב). F　ג). T　ד). F　ה). T　ו). F

2.7. א). כל משולש שווה שוקיים הוא משולש שווה צלעות. F
ב). קיים משולש כך שסכום הזוויות הפנימיות שלו שווה ל- 180. T
ג). כל מצולע עם שלוש או ארבע צלעות הוא משולש שווה צלעות אם כל הזוויות הפנימיות שלו שוות. F
ד). כל מצולע הוא משולש שווה צלעות אם ורק אם הוא משולש וכל הזוויות הפנימיות שלו שוות. T
ה). קיים מרובע שהוא לא מלבן. T
ו). קיים מלבן שהוא לא ריבוע. T
ז). כל מצולע עם שלוש או ארבע צלעות הוא משולש שווה צלעות אם כל הצלעות שלו שוות. F
ח). כל מצולע עם שלוש או ארבע צלעות הוא ריבוע אם הוא מרובע וכל הצלעות שלו שוות. F
ט). כל מצולע עם שלוש או ארבע צלעות הוא ריבוע אם ורק אם כל הזוויות הפנמיות וכל הצלעות שלו שוות. F
י). בכל משולש כל הזוויות הפנימיות שוות אם ורק אם כל הצלעות שוות. T

2.8. א).F　ב). F　ג). T　ד).T　ה).F　ו). F　ז). T　ח). F　ט). F　י). T

2.9. א).T　ב). F　ג). F　ד). T　ה).T　ו). F

2.10. א). 1). F　2). T　3). T　4). T
ב). 1). F　2). T　3). F　4). T
ג). 1). F　2). T　3). T　4). T

2.11. א). לא נכון　ב). לא נכון　ג). לא נכון

2.12

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cup B$	$x \in \overline{C}$	P $x \in A \cap C$	Q $x \in B \cap C$	$x \in P \cup Q$	* $x \in X$	** $x \in Y$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0

בכל מקום שיש 1 ב-(*) יש 1 גם ב- (**) , זאת אומרת שכל x ששייך ל-X שייך גם ל-Y , ואז לפי הגדרה $X \subseteq Y$.

2.13 א).

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B \cup C$	* $x \in A \cap (B \cup C)$	P $x \in A \cap B$	Q $x \in A \cap C$	** $x \in P \cup Q$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1