

## מבוא לפיזיקה מודרנית תורת היחסות הפרטית

### הקשר בין אנרגיה ומסה

את המשוואה המפורסמת  $E=mc^2$  ניתן לקבל ביותר מדרך אחת. (למעשה, מספיק להשתמש בתורה האלקטרומגנטית, ללא התייחסות מפורשת לתורת היחסות. אבל כבר אמרנו שתורת היחסות קשורה קשר הדוק לאור ולכן לאלקטרומגנטיות.)  
אנו נלך בעקבות איינשטיין ושני מאמריו על תורת היחסות משנת 1905 (המופיעים באתר הקורס), ומאוחר יותר נגיע לדברים בצורה יותר מודרנית.

#### קודם כל:

נתבונן בהגדרות של מספר מושגים מוכרים במכניקה ניוטונית. שימו לב שמושגים אלה הוגדרו ע"י פיזיקאים כך שיהיו שימושיים בתיאור הפיזיקה. אנו נרצה לשמור על שימושיות זו, מה שיצריך לעתים שינוי מסוים בנוסחאות של גדלים אלה.

#### מהי מסה?

מסה היא תכונה של הגוף שקובעת את האינרציה (ההתמד) שלו, כלומר, כמה כוח דרוש כדי לגרום לו להאיץ ( $ma=F$ ).  
מכאן נגזרים גדלים שימושיים – תנע ( $p=mv$ ), אנרגיה קינטית ( $E=1/2mv^2$ ), תנע זוויתי ( $J=r \times p$ ). ע"י מדידת גדלים אלה וידיעת המכניקה, ניתן להסיק את המסה של הגוף.

#### מהי אנרגיה קינטית?

אנרגיה קינטית היא חלק מסוים מהאנרגיה של גוף או של מערכת, התלוי במהירות המערכת. כל סוגי האנרגיה האחרים אינם תלויים במהירות הגוף, ונקראים **אנרגיית המנוחה** של הגוף. הגדרה זו מבטיחה את השימושיות של מושג האנרגיה הקינטית.

אנו נדבוק בהגדרה זו של האנרגיה קינטית משום שהיא השימושית ביותר. כמו כן, שימו לב שאנרגיה קינטית במכניקה ניוטונית תלויה רק במסה ובמהירות.

**שאלת בית:** עבור פיזיקה ניוטונית, הוכיחו שרכיב האנרגיה שאינו אנרגיה קינטית (כלומר, אנרגיה המנוחה) אכן אינו תלוי במהירות הגוף במערכת: קחו גוף המורכב מ-N חלקיקים (למשל, אטומים) בעלי מסות שונות. במערכת המנוחה של הגוף (O), האנרגיה שלו נובעת מהתנודות היחסיות בין החלקיקים (חום) ומהאנרגיה הפוטנציאלית של הכוח בין כל זוג חלקיקים. באמצעות טרנספורמציה גליליי, הוכיחו שבמערכת O', בה הגוף נע, האנרגיה שלו ברגע מסוים שווה ל**אותה אנרגיה מנוחה** ועוד הביטוי הרגיל של האנרגיה הקינטית. רמז: מה ניתן לומר על המהירויות התרמיות של החלקיקים במערכת המנוחה של הגוף, ועל טרנספורמציה גליליי עבור כוחות?

**נתבונן בהבזק אור קצר. מהו הקשר בין אנרגיית ההבזק ב-O לאנרגיה שלו ב-O'?** במאמר הראשון ("על האלקטרודינמיקה של גופים נעים"), אחד מן הדברים הרבים שאיינשטיין

$$\text{מפתח הוא נוסחת אפקט דופלר היחסותי, } f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

כמו כן, הוא מראה שמשוואות מקסוול אינווריאנטיות תחת טרנספורמציה לורנץ (כפי שהראו לורנץ ופואנקרה (Poincare) לפניו, אולם, כאמור, ללא הבנת משמעות הטרנספורמציה), ומוצא את כללי הטרנספורמציה עבור השדה החשמלי והשדה המגנטי.

מקסוול הראה שאור הוא גלים של השדה החשמלי והשדה המגנטי, כאשר באור לשני השדות יש אותו הגודל (אמפליטודה, עוצמת שדה), שנסמנו באות A במערכת O. מקסוול גם הראה שצפיפות האנרגיה של האור (אנרגיה ליחידת נפח) נתונה ע"י  $A^2/8\pi$ .

איינשטיין הראה שהדרישה שלמשוואות מקסוול אותה צורה בכל המערכות האינרציאליות מכתובה את הטרנספורמציה הבאה עבור ריבוע השדה:

$$A'^2 = A^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (\text{לא נוכיח כאן דברים הקשורים במשוואות מקסוול})$$

לכן,  $\frac{1-\beta}{1+\beta}$  הוא היחס בין צפיפות האנרגיה של השדה ב-O' לבין צפיפות האנרגיה ב-O.

אילו אלמנטי נפח היו זהים ב-O וב-O', אז  $\frac{1-\beta}{1+\beta}$  היה גם היחס בין האנרגיות של הבזק אור

כלשהו, כפי שהן נמדדות בשתי המערכות.

אך נפח אינו נשמר תחת טרנספורמצית לורנץ.

אז אם ברצוננו למצוא את יחסי האנרגיה של ההבזק בשתי המערכות, עלינו לחשב את

טרנספורמצית הנפח שמכיל בתוכו את הבזק האור:

כדי לעשות זאת, נתבונן בהבזק אור בכוון  $x$  (איינשטיין מוכיח זאת עבור כל כוון של ההבזק. בחרנו את כוון  $x$  לשם פשטות).

נתבונן בנפח מלבני המכיל את הבזק האור.

ב-O, לנפח רוחב  $w$  (בניצב לכוון התקדמות האור) ואורך  $l$  בכוון  $x$ .

אז במערכת O הנפח מוגדר ע"י התחום

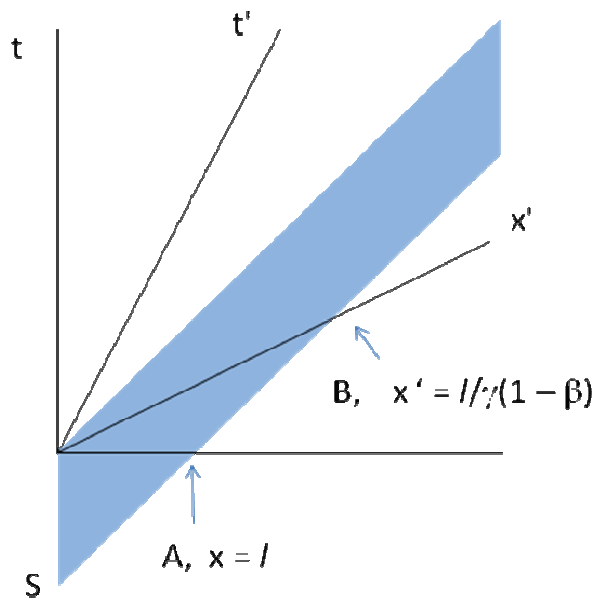
$$z \in (0, w) \bullet$$

$$y \in (0, w) \bullet$$

$$x \in (0 + t, l + t) \bullet$$

**שימו לב** שבתאור הנפח שתופס ההבזק, התחשבנו בהתקדמותו בכוון  $x$ .

תחום העולם של ההבזק מתואר ע"י האזור הכהה בציור:



אורך ההבזק ב-O הוא  $l$ , כפי שרואים בציור (משיגים הבזק כזה ע"י הדלקת פנס בזמן  $t = -l$  וכיבוי בזמן  $t = 0$ ).

לכן הנפח שתופס ההבזק ב-O הוא  $V = w^2 l$ .

נמצא את נפח ההבזק ב-O': קודם כל, בכוונים הניצבים להתקדמות ההבזק, רוחב ההבזק הוא כמו ב-O:

$$\bullet z' \in (0, w)$$

$$\bullet y' \in (0, w)$$

מה קורה בכוון  $x$ ?

נתחיל עם משוואת קו העולם של החלק הקדמי של ההבזק ב-O, שהיא  $x = t + l$ .

נכתוב זאת באמצעות הקואורדינטות של O':

$$\gamma(x' + \beta t') = \gamma(t' + \beta x') + l$$

$$\gamma x'(1 - \beta) = \gamma t'(1 - \beta) + l$$

$$x' = t' + \frac{l}{\gamma(1 - \beta)}$$

ע"י השוואה עם המשוואה ב-O והעובדה שב-O אורך ההבזק הוא  $l$ , רואים שב-O' אורכו הוא  $l/\gamma(1-\beta)$ . כלומר, יחס האורכים של שתי המערכות הם

$$\frac{l'}{l} = \frac{1}{\gamma(1-\beta)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta)} = \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{(1-\beta)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}$$

**שאלת בית:** חשבו את אורך ההבזק ב-O' בדרך אחרת:

מהצירור רואים שאורך זה הוא המרחק המרחבי בין הראשית והארוע B. מצאו את הקואורדינטות של B ב-O מתוך התנאי שנקודה זו נמצאת גם על קו העולם של קרן האור (שאת משוואתו כתבנו כבר) וגם על ציר ה-x' (מהי משוואת ציר זה ב-O?). באמצעות בוסט, מצאו את הקואורדינטות של B ב-O'.

**שאלת בית:** הסבירו מדוע שינוי אורך ההבזק אינו זהה לנוסחה הרגילה של התקצרות האורך  $l' = l/\gamma$ . למעשה, האורך יכול לגדול או לקטון בהתאם לסימן של  $\beta$ ! (רמז: ציירו מוט ניח ב-O, הראו באופן גרפי את שינוי אורכו, ושימו לב להבדלים ביחס לציור למעלה של הבזק האור).

אם כן, הנפח שתופס הבזק האור ב-O' הוא  $V' = w^2 l/\gamma(1-\beta)$ .

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}} \quad \text{היחס בין הנפחים הוא}$$

כעת נכתוב את היחס בין האנרגיות של הבזק האור, כפי שהן נראות במערכות השונות:

$$\frac{E'}{E} = \frac{V' A'^2}{VA^2} = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}} \frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}$$

בשלב זה של המאמר אומר איינשטיין "שווה לציין כי האנרגיה והתדירות של האור משתנים עם מהירות הצופה לפי אותו הכלל".

אנו נחזור לנקודה זו כשנגיע למבוא לפיזיקה קוונטית.

במאמר השני ("האם ההתמד של גוף תלוי בתכולת האנרגיה שלו?"), ממשיך איינשטיין את הדיון:

נתבונן בגוף ניח ב-O בעל אנרגיה  $E_0$ .

במערכת  $O'$  (הנע בכיוון  $x$  ביחס ל- $O$ ), האנרגיה של הגוף היא  $E'_0$

הגוף פולט בו-זמנית שני הבזקי אור בכוונים הפוכים, כל אחד מהם בעל אנרגיה  $E_L/2$  ב- $O$ . שימו לב שהגוף נשאר במנוחה ב- $O$  בעקבות פליטת האור, ולכן מהירותו ב- $O'$  לא משתנה. (לפי משוואות מקסוול, להבזק אור בעל אנרגיה  $E_L$  יש תנע  $E_L/c$ . אך מאחר שהבזקי האור שווים אנרגיה והפוכים בכיוון, אין שינוי במהירות של הגוף.)

לאחר פליטת ההבזקים, לגוף ישנה אנרגיה  $E_1$  ב- $O$  ו- $E'_1$  ב- $O'$ . עקרון היחסות של איינשטיין קובע כי חוק שימור האנרגיה מתקיים בשתי המערכות, אז

$$\begin{aligned} E_o &= E_1 + \frac{E_L}{2} + \frac{E_L}{2}, \\ E'_o &= E'_1 + \frac{E_L}{2} \left[ \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right] \\ &= E'_1 + \frac{E_L}{2} \left[ \sqrt{\frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)(1-\beta)}} + \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)(1+\beta)}} \right] \\ &= E'_1 + \frac{E_L}{2} \left[ \frac{(1-\beta) + (1+\beta)}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}} \right] \\ &= E'_1 + E_L \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = E'_1 + \gamma E_L \end{aligned}$$

כאשר עבור  $O'$  השתמשנו בכלל הטרנספורמציה של האנרגיה של הבזק אור.

נחסר את שתי המשוואות:

$$E'_o - E_o = E'_1 - E_1 + E_L(\gamma - 1)$$

נתבונן בצד שמאל של המשוואה: מהו הגודל  $E'_o - E_o$ ?

$E_o$  היא האנרגיה של הגוף במערכת בה הוא במנוחה,  $E'_o$  היא האנרגיה של הגוף במערכת בה הוא נע. הוא נע.

זו בדיוק ההגדרה של האנרגיה הקינטית של הגוף. לכן:

- ההפרש  $E'_o - E_o$  שווה לאנרגיה הקינטית  $K'_o$  של הגוף ב- $O'$  לפני פליטת האור.
- ההפרש  $E'_1 - E_1$  שווה לאנרגיה הקינטית  $K'_1$  של הגוף ב- $O'$  אחרי פליטת האור.

אז האנרגיות הקינטיות של הגוף ב- $O'$  לפני ואחרי פליטת האור מקיימות

$$K'_o - K'_1 = E_L(\gamma - 1)$$

כלומר, האנרגיה הקינטית של הגוף קטנה בעקבות פליטת האור, וזאת למרות שמהירותו ב-O' לא השתנתה (משום שמהירותו ב-O לא השתנתה) הקטנת האנרגיה הקינטית תלויה

- באנרגיה שאיבד הגוף במערכת בה הוא במנוחה ( $E_L$ )
- במהירות הגוף (ביחס למערכת בה מודדים את האנרגיה הקינטית)

נתבונן במקרה של מהירויות נמוכות, כדי שנוכל להבין את הביטוי מתוך הקירוב הניוטוני, אותו אנו מכירים היטב:

$$K'_o - K'_1 \approx \frac{1}{2} E_L \beta^2 = \frac{1}{2} \frac{E_L}{c^2} v^2$$

$$. K = \frac{1}{2} m v^2, \text{ לדמיון לביטוי של תלות האנרגיה הקינטית במהירות,}$$

מכאן נסיק:

- אם גוף מאבד אנרגיה  $E_L$  בצורת קרינה, המסה שלו קטנה ב-  $\frac{E_L}{c^2}$ .

מאחר שאנרגיה יכולה לעבור ממצב אחד למצב אחר ללא שינוי של חוקי הפיזיקה, לא משנה למה הפכה האנרגיה שאיבד הגוף (קרינה, חום, אנרגיה קינטית של גוף אחר, אנרגיה פוטנציאלית, וכו').

לכן אפשר להסיק מסקנה כללית יותר:

- המסה של גוף היא מדד לתכולת האנרגיה שלו. אם האנרגיה משתנה ב-  $\Delta E$  אז המסה

$$. \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \text{ משתנה ב-}$$

כדי לראות זאת, נכתוב במפורש את האנרגיות הקינטיות מצד שמאל של המשוואה באמצעות  $v$  (המהירות של O' ביחס ל-O),  $m_0$  (מסת הגוף לפני פליטת האור), ו- $m_1$  (מסת הגוף אחרי פליטת האור):

$$, \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_1 v^2 \approx \frac{1}{2} \frac{E_L}{c^2} v^2$$

$$. m_0 - m_1 \approx \frac{E_L}{c^2}, \text{ כלומר,}$$

אינשטיין הציע שיתכן כי ניתן למדוד שינוי מסה זה עבור מלחי רדיום שמאבדים אנרגיה רבה ע"י דעיכה רדיואקטיבית.

קראתי ש-Becquerel מדד כבר אז את שינוי המשקל של חומרים רדיואקטיביים, אך לא מצאתי עדות מוצקה או מאמר בנושא).  
עד כאן איינשטיין.

### שימו לב:

- ב-O, לשני ההבזקים היתה אותה אנרגיה, לכן התנע של הגוף ומהירותו נשארו 0.
  - ב-O', ההבזקים עברו הסחת דופלר, והאנרגיות שלהם שונות. לכן התנע של הגוף השתנה ב-O'.
  - אבל מהירותו ב-O' לא השתנתה (הוא עדיין במנוחה ב-O ולכן מהירותו ב-O' עדיין  $\beta$ ).
  - לכן נסיק שמסתו היתה חייבת להשתנות כדי שהאנרגיה הקינטית שלו תשתנה.
- נבדוק מה קרה לתנע של הגוף בזמן פליטת האור: מאחר שהתנע של הבזק אור שווה לאנרגיה שלו חלקי c, שינוי התנע של הגוף ב-O' הוא:

$$\begin{aligned}\Delta p' &= \frac{E_L}{2c} \left[ \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} - \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \right] \\ &= \frac{E_L}{2c} \left[ \frac{(1-\beta) - (1+\beta)}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}} \right] \\ &= \frac{E_L}{c} \left[ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = -\gamma \frac{E_L}{c} \beta \\ &\approx \frac{E_L}{c^2} V\end{aligned}$$

כאשר הקירוב האחרון הוא במקרה הניוטוני, בו (בסדר ראשון ב- $\beta$ ),  $\gamma \approx 1$ .  
השוו לביטוי  $p=mV$  אז קיבלנו שגם שינוי התנע מתאים להקבלה  $m=E_L/c^2$ .

לסיכום, ראינו שבניסוי בו גוף מאבד אנרגיה  $\Delta E$ , המסה שלו קטנה ב- $\Delta m = \Delta E/c^2$ .  
כדי שלא להתבלבל עם אבדן אנרגיה קינטית ע"י שינוי מהירות, הניסוי אורגן כך שמהירות הגוף לא השתנתה בשל אבדן האנרגיה, ואנו חייבים להסיק שאבדן האנרגיה נבע מאבדן מסה.

במלים אחרות, הראינו את השקילות (equivalence)  $E=mc^2$  בין מסה לאנרגיה. כלומר,

**מסה היא עוד צורה של אנרגיה,**

בדומה לצורות המוכרות האחרות.



