פתרונות תרגיל 7 –

.1

א) קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:
יהיו $(x_1,x_1,z_1),(x_2,x_2,z_2)\in\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$ וסקלר α. אז נקבל:

$$(x_1,x_1,z_1)+\alpha(x_2,x_2,z_2)=(x_1+\alpha x_2,x_1+\alpha x_2,z_1+\alpha z_2)\in\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$$

לכן, הקבוצה $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$ היא באמת תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ב) הקבוצה הנ"ל לא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ כיוון שהיא לא מכילה את איבר ה-0.

ד) קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:
יהיו $(x_1,y_1,-x_1-y_1),(x_2,y_2,-x_2-y_2)\in\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1+b_2+b_3=0\}$ וסקלר α.
אז נקבל:

$$(x_1,y_1,-x_1-y_1)+\alpha(x_2,y_2,-x_2-y_2)=(x_1+\alpha x_2,y_1+\alpha y_2,-x_1-y_1-\alpha x_2-\alpha y_2)$$

שכמובן שייך לקבוצה הנ"ל ולכן הקבוצה $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1+b_2+b_3=0\}$ היא באמת תת-
מרחב של $\mathbb{R}^3$.

.2

<u>פתרון:</u>
נתחיל בדירוג את המטריצה:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\1&2&3&5&0\\0&0&2&4&0\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\left\langle\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\0&0&2&4&0\\0&0&2&4&0\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left\langle\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right\rangle$$

נשים לב שיש לנו שורת אפסים בנוסף לכך שיש משוואה אחת פחות מנעלמים ולכן
נצטרך להשתמש בשתי משתנים כפרמטרים: $x_2=t,x_4=s$. לכן, הפתרון יהיה
$(x_1=-2t+s,x_2=t,x_3=-2s,x_4=s)$ ולכן מרחב הפתרונות יהיה:
$V=\{(-2y+w,y,-2w,w)\mid y,w\in\mathbb{R}\}$. נשאר להוכיח ש- V תת מרחב וקטורי של
$\mathbb{R}^4$:
קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:
יהיו $(-2y_1+w_1,y_1,-2w_1,w_1),(-2y_2+w_2,y_2,-2w_2,w_2)\in V$ וסקלר α. אז נקבל:

$$(-2y_1+w_1,y_1,-2w_1,w_1)+\alpha(-2y_2+w_2,y_2,-2w_2,w_2)=$$
$$=(-2(y_1+\alpha y_2)+(w_1+\alpha w_2),(y_1+\alpha y_2),-2(w_1+\alpha w_2),(w_1+\alpha w_2))\in V$$

מ.ש.ל.

.3

<u>פתרון:</u>
א) קודם כל, נשים לב שמטריצת האפס היא מטריצה סימטרית ולכן היא נמצאת בקבוצה.
כעת, נשתמש בקריטריון המקוצר:
יהיו $A,B\in W$ וסקלר α. אז נקבל:

$$(A+\alpha B)_{ij} == (A)_{ij}+\alpha (B)_{ij} = (A)_{ji}+\alpha (B)_{ji} = (A+\alpha B)_{ji}$$

כלומר, המטריצה החדשה סימטרית ולכן $A+\alpha B\in W$. לכן, קבוצת המטריצות הסימטריות מהווה תת-מרחב של V.
ב) קודם כל, נשים לב שמטריצת האפס היא מטריצה אלכסונית ולכן היא נמצאת בקבוצה.
כעת, נשתמש בקריטריון המקוצר:
יהיו $A,B\in W$ וסקלר α. אז נקבל עבור $i\neq j$:

$$(A+\alpha B)_{ij} == (A)_{ij}+\alpha (B)_{ij} = 0$$

כלומר, המטריצה החדשה אלכסונית ולכן $A+\alpha B\in W$. לכן, קבוצת המטריצות האלכסוניות מהווה תת-מרחב של V.
ג) קודם כל, נשים לב שמטריצת האפס היא מטריצה משולשית עליונה ולכן היא נמצאת בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצר:
יהיו $A,B\in W$ וסקלר α. אז נקבל עבור $i<j$:

$$(A+\alpha B)_{ij} == (A)_{ij}+\alpha (B)_{ij} = 0$$

כלומר, המטריצה החדשה משולשית עליונה ולכן $A+\alpha B\in W$. לכן, קבוצת המטריצות המשולשיות העליונות מהווה תת-מרחב של V.

.4

<u>פתרון:</u> לפני שנתחיל לפתור את התרגיל נשים לב שאם נכתוב את הווקטורים האלו כשורות מטריצה אז הם יהיו בת"ל אם אפשר לדרג אותה לצורה קנונית ואחרת הם יהיו ת"ל.

א) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1-R_2\to R_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. לכן הוקטורים בת"ל.

ב) $\begin{pmatrix}2&4&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3} \begin{pmatrix}2&4&1\\0&2&1\\0&4&2\end{pmatrix}$. לכן הווקטורים ת"ל.

ג) $\begin{pmatrix}3&4&1\\2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1\to R_3} \begin{pmatrix}3&4&1\\2&2&0\\3&4&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix}3&4&1\\2&2&0\\5&6&1\end{pmatrix}$. לכן הווקטורים ת"ל.

.5

<u>פתרון:</u> לפני שנתחיל לפתור את התרגיל נשים לב שאם נכתוב את הווקטורים האלו כעמודות מטריצה ואת הווקטור הנתון כעמודת הפתרון אז יהיה לווקטור צ"ל אם יהיה פתרון למערכת המשוואות שנוצרה.

א)

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&1&0&4\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle \xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1-R_2\to R_1} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-1\\0&1&0&3\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left\langle\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right\rangle.$$

לכן, קיים צ"ל: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

ב) $$\left\langle\begin{array}{ccc|c}2&1&2&3\\2&2&4&4\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle \xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1-2R_3\to R_1} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&1&2&1\\0&2&4&2\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&1&2&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle.$$

לכן, קיים יותר מצ"ל יחיד מהצורה: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+(1-2\alpha)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$.

דוגמה מפורשת: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$.

ג)

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}3&2&5&3\\4&2&6&4\\1&-2&1&1\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_2-4R_3\to R_2} \left\langle\begin{array}{ccc|c}3&2&5&3\\0&10&2&0\\1&-2&1&1\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_1-3R_3\to R_1} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&8&2&0\\0&10&2&0\\1&-2&1&1\end{array}\right\rangle$$

$$\xrightarrow{5R_3+R_2\to R_3} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&8&2&0\\0&10&2&0\\5&0&7&5\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&8&2&0\\0&2&0&0\\5&0&7&5\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_1-4R_2\to R_1} \left\langle\begin{array}{ccc|c}0&0&2&0\\0&2&0&0\\5&0&7&5\end{array}\right\rangle.$$

לכן, קיים צ"ל יחיד מהצורה: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$.