פתרון תרגיל בית 9

שאלה 1

F_i קומפקטית לכל $i\in I$. X האוסדורף ולכן F_i סגורה ב X לכל $i\in I$. לכן $A=\bigcap_{i\in I}F_i$ סגורה ב X. יהי $i_0\in I$ מתקיים $A\subseteq F_{i_0}$, לכן $A=\bigcap_{i\in I}F_i$ סגורה גם ב F_{i_0}. מכיון ש F_{i_0} קומפקטי ו A ת"מ סגור שלו נקבל ש $A=\bigcap_{i\in I}F_i$ ת"מ קומפקטי.

שאלה 2

א. יהיו $A_1,...,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. נראה כי $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ הינו קומפקטי. יהי $\{U_j\}_{j\in J}$ כיסוי פתוח ל- A ב- X, כלומר: $A\subseteq\bigcup_{j\in J}U_j$. לכל $1\le i\le n$ $A_i\subseteq A\subseteq\bigcup_{j\in J}U_j$ קומפקטית ולכן קיימת קבוצה סופית $F_i\subseteq J$ כך ש $A_i\subseteq\bigcup_{j\in F_i}U_j$. תהי $F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$. אזי, F תת קבוצה סופית של J כאיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות ומתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subseteq\bigcup_{j\in F}U_j$. מצאנו תת כיסוי סופי ומכאן $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ קומפקטי.

ב. ניקח X אינסופי עם טופולוגיה דיסקרטית. הוא לא קומפקטי אבל ניתן להשיג אותו כאיחוד הנקודונים שכל אחד מהם כן קומפקטי.

שאלה 3

א)ברור שאם קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ $x_n=x$ אזי $x_n\to x$ (נכון בכל מ"ט). נוכיח את הכיוון ההפוך נניח $x_n\to x\in X$. תהי $U=\left(X\setminus\{x_n\}\right)\cup\{x\}$. מתקיים $x\in U$ ו- $\left|U^C\right|\le\aleph_0$ (מדוע?). לכן $x\in U\in\tau$, כלומר U סביבה של x. מכיוון ש- $x_n\to x$ ו- U סביבה של x אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ $x_n\in U=\left(X\setminus\{x_n\}\right)\cup\{x\}$. אך ניתן לראות שבמקרה זה בהכרח $x_n=x$. משמע, הסדרה קבועה לבסוף.

ב) $\{p\}\in\tau_{disc}$ אבל $\{p\}\notin\tau$ שכן $\left|\{p\}^c\right|=|\mathbb{R}|>\aleph_0$ לכן $\tau\ne\tau_{disc}$.

ג) נניח בשלילה ש $\left(X,\tau\right)$ מטריזבילי. אזי קיימת מטריקה d על X שמשרה את τ. לכן מתקיים $x_n \xrightarrow{d} x \iff x_n \xrightarrow{\tau} x$. אבל $x_n \xrightarrow{\tau} x$ אמ"מ הסדרה קבועה לבסוף. הראיתם בתרגיל בית הראשון שבמרחב $\left(X,d_{disc}\right)$ זהו בדיוק האפיון של הסדרות המתכנסות. לכן d שקולה ל d_{disc} והן מגדירות את אותו האוסף של קבוצות פתוחות, ובמילים אחרות הן משרות את אותה הטופולוגיה. לכן, $\tau = \tau_{disc}$ בסתירה לסעיף הקודם.

שאלה 4

לפי תרגיל שהוכחנו, מרחב המכפלה $X \times X$ הוא מטריזבילי , לכן הטופולוגיה עליו היא הטופולוגיה המתקבלת מהמטריקה $d_{\max}$. כלומר: $d_{\max} : \left(X\times X\right)\times\left(X\times X\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $d_{\max}\left(\left(x,y\right),\left(t,s\right)\right)=\max\left\{d\left(x,t\right),d\left(y,s\right)\right\}$. נראה שהפונקציה רציפה לפי $d_{\max}$ ואז בפרט היא רציפה מטופולוגית המכפלה. נוכיח רציפות בנקודה $\left(x,y\right)$. צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}\left(\left(x,y\right),\left(t,s\right)\right)<\delta$ אז $\left|d\left(x,y\right)-d\left(t,s\right)\right|$.

יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. אזי אם $d_{\max}\left(\left(x,y\right),\left(t,s\right)\right)<\delta$ מתקיים

$$\left|d\left(x,y\right)-d\left(t,s\right)\right|\le d\left(x,t\right)+d\left(y,s\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

שימו לב: אי השוויון $\left|d\left(x,y\right)-d\left(t,s\right)\right|\le d\left(x,t\right)+d\left(y,s\right)$ נובע מאי שוויון המשולש של המטריקה d (איך?).

שאלה 5

א) נראה שהפונקציה מקבלת מקסימום (ואת המינימום מוכיחים באופן דומה). f רציפה, X קומפקטי ולכן $f\left(X\right)\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטי. לכן לפי היינה בורל $f\left(X\right)$ חסום וסגור (ב-$\mathbb{R}$) . נסמן $M=\sup f\left(X\right)$. לפי הגדרת הסופרמום מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in X$ כך ש- $M-\frac{1}{n}<f\left(x_n\right)\le M$. לכן, לפי משפט הכריך, $f\left(x_n\right)\to M\in\mathbb{R}$. אך $f\left(X\right)$ סגורה ולכן $M\in f\left(X\right)$ ומכאן M הוא מקסימום.

כעת, נפתור את סעיפים ב וג ביחד.

$\left([1,5]\times[2,6]\right)\setminus\left((2,4)\times(3,5)\right)$ חסום וסגור ב $\mathbb{R}^2$ ולכן קומפקטי. לכן עפ"י הכללת משפט ויירשטראס, לפונקציה הרציפה f קיימים מינימום ומקסימום. נניח שהמינימום a והמקסימום b. כעת, $\left([1,5]\times[2,6]\right)\setminus\left((2,4)\times(3,5)\right)$ מרחב קשיר מסילתית (בין כל שתי נקודות ניתן להעביר מסילה שהיא שרשור של מסילות סטנדרטיות) ולכן קשיר. עפ"י משפט ערך הביניים הפונקציה משיגה כל ערך בין a ל- b ובסה"כ קיבלנו כי התמונה של f שווה ל $[a,b]$ עבור a,b מסוים.

<u>שאלה 6</u>

א. בתור בסיס ניתן לקחת את הטופולוגיה עצמה (קל לראות שהתכונות הדרושות עבור בסיס מתקיימות באופן טריוויאלי).

ב. B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן נותר לבדוק את התנאי השני. תהי $O\in\tau$ ותהי $x\in O$. נרצה למצוא $U\in B_1$ כך ש- $x\in U\subseteq O$. B_2 בסיס ולכן קיימת $U\in B_2$ המקיימת $x\in U\subseteq O$. מכיוון ש- $B_2\subseteq B_1$ נקבל ש- $U\in B_1$ וקיבלנו את הדרוש.

ג. אם $\tau_1\subseteq\tau_2$ אזי ברור ש- $B_1\subseteq\tau_2$ (כי $B_1\subseteq\tau_1$ כבסיס ל-$\left((X,\tau_1)\right)$. בכיוון השני: תהי $O\in\tau_1$. קיימת משפחה של אינדקסים I ומשפחה של קבוצות $\{U_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $i\in I$ $U_i\in B_1$ ומתקיים $O=\bigcup_{i\in I}U_i$ (מהגדרת בסיס). נתון כי $B_1\subseteq\tau_2$ ולכן לכל $i\in I$ $U_i\in\tau_2$. אך τ_2 היא טופולוגיה ולכן $O=\bigcup_{i\in I}U_i\in\tau_2$

<u>שאלת בונוס</u>

נראה שהפונקציה היא פתוחה ומכאן היא הומיאו'. מ"ל שפתוחה בסיסית (כלומר קטע פתוח עוברת לפתוחה . נראה שלכל קטע מהצורה (a,b) קיים קטע פתוח (c,d) כך ש $f\left((a,b)\right)=(c,d)$.

$\left[a,b\right]$ קומפקטי וקשיר ולכן באופן דומה לשאלה 5 (ראו פתרון לעיל) ניתן להסיק שקיימים $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש $f\left([a,b]\right)=\left[c,d\right]$. נראה כעת שייתכנו רק אחד משני המצבים הבאים: 1) $f(a)=c\wedge f(b)=d$ או

2) $f(a)=d\wedge f(b)=c$.

אמנם, אחרת קיים $x\in(c,d)$ כך ש $f(a)=x$ או $f(b)=x$.

נניח ש $f(a)=x$ (בשלילה) .

מתקיים $(a,b]$ ת"מ קשיר אבל $f\left((a,b]\right)=\left[c,x\right)\cup\left(x,d\right]$ אינו קשיר וזו סתירה שכן פונקציה רציפה שולחת מרחב קשיר למרחב קשיר ו $\left[c,x\right)\cup\left(x,d\right]$ אינו קשיר. בצורה דומה ניתן להוכיח שלא יתכן ש $f(b)=x$ כאשר $x\in(c,d)$.

לכן בהכרח מתקיימים אחד מהמצבים 1 או 2. אבל מכל אחד מהמקרים האלו ניתן להסיק ש $f\left((a,b)\right)=(c,d)$ ולקבל הדרוש.