Bar-Ilan University
אוניברסיטת בר־אילן

Department of Mathematics

טופולוגיה – 05 222 - 88 – סמסטר ב' תש"ף, 23.09.2020 מבחן מועד ב'

מרצה: פרופ' מיכאל מגרל מתרגלים: תמר בר-און, עידו שפרינגר

הנחיות:

- המבחן יתקיים בעזרת מערכת מודל ומפגש zoom עם ציון מספרי אחרי הבדיקה.
- לפני קבלת שאלונים כל אחד חייב לרשום ב chat של זום מספר תעודת זהות.
  יתכן ותתבקשו להציג תעודת זהות.
- לרשום על הדף הראשון: שם, תעודת זהות,
  מספר תרגיל **שלא בחרתם ואם פתרתם שאלת הבונוס**.
- יש **לבחור בדיוק 4 מתוך 5** שאלות.
- בכל שאלה יש 2 סעיפים. כל סעיף שווה **<u>13 נקודות</u>**. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות.
- לכן אפשר להגיע בס"ה ל 109 נקודות ! ☺ <u>הציון הסופי</u> לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר. אסור להתכתב עם סטודנטים אחרים ב chat.
- בזמן המבחן כולם חייבים לפתוח מצלמות zoom.
- משך המבחן **שלוש שעות**. ועוד 15 דקות על הסריקה והעברת הקבצים.
- מתחילים התחברות לזום מהשעה 08:50. קובץ השאלות תקבלו דרך מערכת מודל.
- נסיים כתיבת המבחן עד 12:00. אחרי סריקה אתם צריכים להעלות קבצים עד 12:15 דרך מודל כמו שעשיתם עם הבוחן. יחד עם זה אתם מתבקשים לשלוח את הקבצים למייל שלי.
- כמובן אפשר להתחיל העלאת קבצים גם לפני 12:15 מתי שתבחרו.
- יש תוספת זמן לסטודנטים מסוימים שקיבלו אישור ממדור בחינות.
- במקביל יהיו לנו ערוצי תקשורת נוספים (למשל אם יהיו בעיות תקשורת או עומס במודל) :
  א. מייל שלי ישיר megereli@math.biu.ac.il
  ב. וגם whatsapp 054-7845344
- שאלות למרצה להפנות דרך zoom או מייל.
- אתם יכולים לכתוב את המבחן בכתב יד ואז לסרוק. אפשר גם להקליד. יש עדיפות למסור את הקבצים שלכם בפורמט PDF
  .

- אנחנו משאירים את האופציה לבדוק את הטקסטים שלכם על "מקוריות מסמכים" דרך הכלים המתאימים. אופציונלי גם לבחון בעל פה סטודנטים מסוימים אחרי המבחן.

שאלות ותשובות:

1. א. נניח X מרחב טופולוגי בעל תכונת מניה שניה. הוכיחו שהוא מקיים תכונת Lindelof. כלומר, לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי בן מניה. תנו דוגמה של מרחב טופולוגי ללא תכונת Lindelof.
ב. הוכיחו שפונקציה הבאה $f(z)=\frac{z^2}{||z||^2}$, $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to T$ היא פונקצית מנה (כאשר $T:=\{z\in\mathbb{C}:||z||=1\}$ מעגל יחידה במספרים מרוכבים).

__פתרון__ א: משיעורי בית מספר 7 שאלה 10.

__פתרון__ ב: הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{||z||^2}$, $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to T$ היא כמובן רציפה כי $z\neq 0$. היא על כי $||f(z)||=1$ ולכל $u\in T$ קיים $z\in T$ כך ש $f(z)=u$ (ניקח z = אחד משורשי סדר 2 מ u).
על מנת להוכיח ש $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to T$ מנה, לפי משפט על הצמצום, מספיק להוכיח שקיים תת מרחב Y ב $\mathbb{C}$ כך שהצמצום $f|_Y:\mathrm{Y}\to T$ מנה. אפשר לקחת $Y=T$ כי $f(z)=z^2$ $f|_Y:\mathrm{T}\to\mathrm{T}$ רציפה על, T קומפקטי והאוסדורפי. לכן הצמצום פונקציה סגורה. למדנו שפונקציה סגורה רציפה ועל היא תמיד מנה.

2. א. נניח A תת קבוצה צפופה במרחב טופולוגי X. הוכיחו שלכל תת קבוצה פתוחה O ב X מתקיים $\overline{O}=\overline{A\cap O}$. תנו דוגמה נגדית אם O לא פתוחה.
ב. הוכיחו: קיימת קומפקטיפיקציה 1-נקודתית של X $\Leftrightarrow$ X קומפקטי מקומית והאוסדורפי.

__פתרון__ א: הנוסחה עבור קבוצה פתוחה O היא חלק משיעורי בית מספר 8 שאלה 2.
אם לא פתוחה O אז הנוסחה לא תמיד נכונה. למשל ב $X=\mathbb{R}$ ניקח $A=\mathbb{Q}$ ו $O=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
אז $\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}=\overline{A\cap O}=\varnothing\neq\mathbb{R}=\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\overline{O}$.

__פתרון__ ב:
(תרגיל ששאלתי בהרצאה 12)
$\Rightarrow$
זה חלק מהתירגול 11 שאלה 2.

$\Leftarrow$
נניח $i:X\subset Y$ קומפקטיפיקציה 1-נקודתית של X. אז $Y=X\cup\{p\}\in\mathrm{T}_2$.
האוסדורפיות היא תכונה תורשתית לכן גם $X\in\mathrm{T}_2$.

כעת מספיק להוכיח שלכל נקודה $a \in X$ קיימת סביבה קומפקטית ב X.
נבחר בסביבות פתוחות וזרות $U \in N(a)$ $V \in N(p)$ במרחב Y. אז ברור $p \notin cl(U)$.
לכן $cl(U) \subseteq X$. לפי הגדרת טופולוגיה ב Y ברור ש $cl(U)$ סביבה של a גם בתת מרחב X.
מצד שני $cl(U)$ קומפקטי כתת קבוצה סגורה במרחב קומפקטי Y.

3. א. הוכיחו את המשפט הבא: קבוצת קנטור C הומיאומורפית למרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
ב. נניח X מרחב טופולוגי האוסדורפי. הוכיחו: X בעל תכונת הפרדה T_3 אם ורק אם לכל נקודה $a \in X$ ולכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $V \in N(a)$ כך ש $\overline{V} \subseteq U$.

<u>**פתרון**</u> א:
משפט עם הוכחה מהרצאה מספר 11.

<u>**פתרון**</u> ב:
$\Leftarrow$
בה"כ נניח $U \in N(a)$ סביבה פתוחה. אז המשלים $U^c = X \setminus U$ סגור ב X. לפי ההנחה $X \in T_3$.
לכן יש סביבות פתוחות וזרות $V \in N(a)$ $W \in N(U^c)$. אז $V \subseteq W^c \subseteq U$. מכאן
$\overline{V} \subseteq \overline{W^c} = W^c \subseteq U$.

$\Rightarrow$
נתון ש $X \in T_2$ לכן גם $X \in T_1$. בודקים תנאי שני ל T_3. נניח $a \in X$ ו B קבוצה סגורה ב X שלא מכילה את a. אז $U := B^c$ קבוצה פתוחה שמכילה את a. נקבל $U \in N(a)$. לפי ההנחה קיימת סביבה $V \in N(a)$ כך ש $\overline{V} \subseteq U$. נסמן $W := (\overline{V})^c$. אז $W \in N(B)$ $V \cap W = \varnothing$.

4. א. הוכיחו את המשפט הבא: כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו.
ב. נניח $X := (\mathbb{R}, \tau_s)$ קו סורגנפראי
(תזכורת: אוסף הקבוצות $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ הוא בסיס לטופולוגיה τ_s).
נסמן $A := (7,2020) \cup \{2020 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
הוכיחו או הפריכו: הסגור $\overline{A}$ של A בתוך קו סורגנפראי לא קומפקטי.

<u>**פתרון**</u> א:
משפט עם הוכחה מהרצאה מספר 6.

פתרון ב:
קודם כל הסגור $\overline{A}$ (של A בתוך קו סורגנפראי) שווה ל
$\overline{A}:=[7,2020]\cup\{2020+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.
(קחו בחשבון שלכל סביבה בסיסית $[7,7+\varepsilon)$ החיתוך עם A לא ריק).
הקבוצה $\overline{A}$ היא לא קומפקטית בתוך קו סורגנפראי.
נתבונן באוסף הבא של קבוצות פתוחות ב $X:=(\mathbb{R},\tau_s)$
$\alpha:=\{[7,2020-\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N},[2020,2021)\}$
מכסה את A. אבל אף תת אוסף סופי לא יכול לכסות את A.

5. א. נניח O תת קבוצה פתוחה וקשירה במרחב נורמי. הוכיחו ש O קשירה מסילתית אבל לא תמיד קמורה.
ב. הוכיחו שמכפלה טופולוגית $X\times Y$ מטריזבילית אם ורק אם X,Y מטריזביליים.

פתרון א: החלק הראשון הוכחנו בהרצאה מספר 7.
החלק השני: דוגמה נגדית במישור אוקלידי ניקח קבוצה $O:=(0,2)\times(0,2)\setminus[0,1]\times[0,1]$.
אז היא פתוחה קשירה אבל לא קמורה.

פתרון ב: בכיוון אחד זה חלק משיעורי בית מספר 8 שאלה 2.
בכיוון שני ניקח בחשבון: מטריזביליות היא תכונה תורשתית, שתת מרחב $X\times\{y\}$ הומיאומורפי ל X ובאופן דומה $\{x\}\times Y$ הומיאומורפי ל Y.

שאלת הבונוס:
הוכיחו או הפריכו: קיימת פונקציה $f:\mathrm{X}\to Y$ רציפה ועל כך ש Y קומפקטי, X קומפקטי מקומית, קשיר אבל $f:\mathrm{X}\to Y$ לא מנה.

פתרון:
נגדיר
$$\mathrm{X}:=[0,1)\quad Y:=T=\{\mathrm{z}\in\mathbb{C}:\|\mathrm{z}\|=1\}\quad \mathrm{f}:[0,1)\to\mathrm{T},\ \mathrm{f(t)}=\mathrm{cis}(2\pi\mathrm{t})$$
אז זאת פונקציה רציפה, על, חח"ע.
הפונקציה לא הומאומורפיזם (ראו הרצאה 5). לכן לפי משפט "הומיאומורפיזם ומנה" (ראו הרצאה 14) נקבל שהפונקציה לא מנה. שימו לב ש T קומפקטי, $[0,1)$ קומפקטי מקומית וקשיר.