פיתרון לתרגיל מספר 7:

תשובה 1:

$X \in [0,20]$

נחלק לשני מאורעות:

או שמספיקים לרכבת של 07:15, זאת אומרת ש X בין 0 לבין 5, או שמגיעים לרכבת של 07:30, זאת אומרת ש X בין 5 לבין 20.

$P(X \le 5) = F_X(5)$

עבור ערכי Y שבין 0 ל – 5 , ישנן שתי אפשרויות – או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת הראשונה (של ורבע) או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת השניה (של וחצי)

$$P(Y \le y) = P(X \in [5-y,5]) + P(X \in [20-y,20]) = F_X(5) - F_X(5-y) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

עבור ערכי Y שגדולים מ – 5, הם יכולים להתקבל רק אם נגיע לרכבת השניה (של וחצי), הסיכוי שנמתין לפחות y>5 דקות הוא הסיכוי להספיק לרכבת הראשונה (שכן אז נמתין פחות מ – y דקות), ועוד הסיכוי להמתין לפחות y דקות לרכבת השניה:

$$P(Y \le y) = P(X \in [0, 5] + P(X \in [20-y,20])) = F_X(5) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

ונגזור על-מנת לקבל צפיפות:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(5-y) + f_X(20-y) & 0 \le y \le 5 \\ f_X(20-y) & 5 \le y \le 15 \\ 0 & else \end{cases}$$

תשובה 2:

א. הקשר בין המקדמים a ו—b לבין השורשים x_1 ו—x_2 נתון על ידי זוג הנוסחאות

$$x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{ו—} \quad x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

אשר מביאות

$$\begin{cases} a = -(x_1 + x_2), \\ b = x_1 x_2. \end{cases}.$$

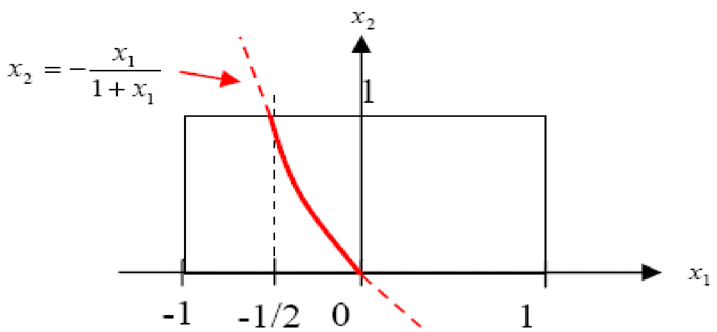
ההסתברות הדרושה, $P(a>b)$, היא

$$P(a>b) = P\big(-(x_1+x_2) > x_1x_2\big) = P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right).$$

בשוויון האחרון, השתמשנו בעובדה ש—$1+x_1$ אינו שלילי. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right) = \frac{\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right|}{|\Omega|}.$$

מהציור עולה, כי גודל מרחב המדגם הוא $|\Omega| = 2$. גודל המאורע $\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}$ הוא



$$\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right| = \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-\frac{x_1}{1+x_1}\right)dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x_1+1-1}{1+x_1}dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)dx_1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{1+x_1}dx_1 = \ln(1+x_1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \ln 2.$$

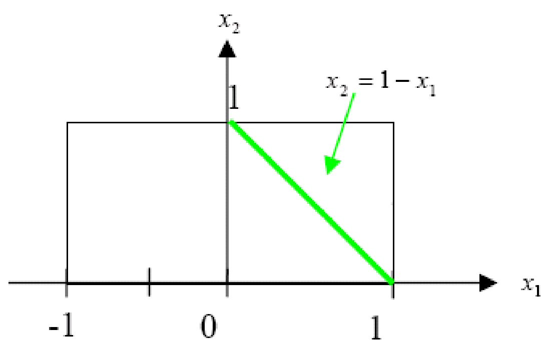
זה מביא

$$.P(a<b) = \frac{\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}\ln 2$$

ב. ההסתברות הדרושה היא הסתברות מותנית

$$P(b>0\ /\ a>-1) = P(x_1x_2>0\ /\ -(x_1+x_2)>-1) = P(x_1>0\ /\ x_2<1-x_1)$$

$$= \frac{P(x_1>0 \cap x_2<1-x_1)}{P(x_2<1-x_1)}$$



מהתרשים רואים ש

$$.P(x_1>0 \cap x_2<1-x_1) = \frac{|\{x_1>0\} \cap \{x_2<1-x_1\}|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

וגם

$$P(x_2<1-x_1) = \frac{|\{x_2<1-x_1\}|}{|\Omega|} = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

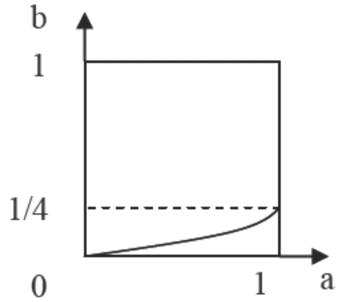
כך ש—

$$.P(b>0\ /\ a>-1)=\frac{P(x_1>0\ \cap x_2<1-x_1)}{P(x_2<1-x_1)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

ג. שורשי המשוואה הם :

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\quad,\quad x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

את התשובה יש לחלק לשנים. ראשית נחשב את ההסתברות ששורשי המשוואה ממשיים, דהיינו כאשר מתקיים $a^2-4b\geq 0$ דהיינו ההסתברות הדרושה היא $P(b<\frac{a^2}{4})$ שמתאימה בידיוק לשטח שמתחת לעקום $b=\frac{a^2}{4}$



אזי $.P(b<a^2/4)=\int_0^1\frac{a^2}{4}da=\frac{1}{12}$

בשלב השני נמצא את הסתברות ש - $|X_1-X_2|=\sqrt{a^2-4b}<\frac{1}{2}$ כאשר נתון ש $a^2-4b\geq 0$

$$P\left(\sqrt{a^2-4b}<\frac{1}{2}/a^2>4b\right)=P\left(a^2-4b<\frac{1}{4}/a^2>4b\right)$$

$$=\frac{P\left(\left\{a^2-4b<\frac{1}{4}\right\}\cap\left\{a^2>4b\right\}\right)}{P(a^2>4b)}=\frac{P\left(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{16}<b<\frac{a^2}{4}\right)}{P\left(b<\frac{a^2}{4}\right)}$$

נשים לב ש $P(A<b<B)=P(b<B)-P(b<A)$ לכן

$$\frac{\int_0^1 \frac{a^2}{4}da-\int_{1/2}^1\left(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{16}\right)da}{\frac{1}{12}}=\frac{1}{2}$$

<u>תשובה 3:</u>

ראשית פונקצית ההצטברות והצפיפות הן:

$$F_X(x)=\frac{x+1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

א.

$$Y=\sqrt{|X|}$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\sqrt{|X|}\le y\right)=P\left(X\le y^2\right)=F_X(y)=\frac{y^2+1}{2}$$

$$f_Y(y)=\frac{2y}{2}=y$$

ב.

$$Y=-\ln(|X|)$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\ln(|X|)\le y)=P(\ln(|X|)\ge y)=P\left(|X|\ge e^y\right)$$

$$=P\left(X\ge e^y\right)+P\left(X\le -e^y\right)=1-F_X\left(e^y\right)+F_X\left(-e^y\right)=1-\left(\frac{e^y+1}{2}\right)+\left(\frac{-e^y+1}{2}\right)=1-e^y$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\le 0\\ 0 & else\end{cases}$$

<u>תשובה 4:</u>

א.   צריך לבדוק ש $\iint f_{x,y}(x,y)dxdy=1$

$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x,y)dxdy}=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}\left(\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{xy}}{2}\right)\mathrm{dydx}=\int_0^1\frac{6}{7}\left[\mathrm{x}^2\mathrm{y}+\frac{\mathrm{xy}^2}{4}\right]_0^2\mathrm{dx}=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=1$ אכן

ב.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6}{7}\left(\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{xy}}{2}\right)dy=\frac{6}{7}\left[\mathrm{x}^2\mathrm{y}+\frac{\mathrm{xy}^2}{4}\right]_0^2=\frac{12}{7}x^2+\frac{6}{7}x$$

תשובה 5:

.1 $$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^3\le y)=P(X\le\sqrt[3]{y})=\int_0^{\sqrt[3]{y}}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda\cdot\sqrt[3]{y}}$$

$$f_Y(y)=\left(F_Y(y)\right)'=\frac{\lambda}{3}\sqrt[3]{y^2}e^{-\lambda\cdot\sqrt{y}}$$

תשובה 6:

על מנת של Y תהיה התפלגות אחידה, ההסתברות של כל אחד מערכיו להיות שליש, כלומר:

$$\frac{1}{3}=p(Y=0)=p(X\le a)=\int_0^a\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^a=1-e^{-\lambda a}$$

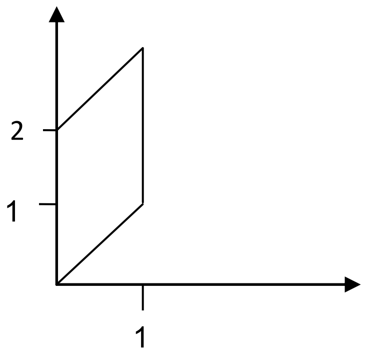
$$\frac{1}{3}=p(Y=1)=p(a\le X\le b)=\int_a^b\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$$

$$\frac{1}{3}=p(Y=2)=p(X\ge b)=\int_b^\infty\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda b}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $a=\frac{\ln 1.5}{\lambda}$ וממשוואה אחרונה $b=\frac{\ln 3}{\lambda}$.

תשובה 7:

ראשית נצייר את התחום הרלוונטי:



נתון $X\sim U(0,1)$ לכן $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & other\ wise\end{cases}$ ו- $Y|X=x\sim U(x,x+1)$ לכן

$$f_{Y|X=x}(y)=\begin{cases}1 & x\le y\le x+1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

א. לכל $0\le x\le 1$ ו- $x\le y\le x+1$ הצפיפות המשותפת היא $f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X=x}(y)\cdot f_X(x)=1\cdot 1=1$ אחרת, לפחות אחת מהפונקציות $f_X(x)$ ו- $f_{Y|X=x}(y)$ מתאפסת ולכן $f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X=x}(y)\cdot f_X(x)$ מתאפסת.

ב. עבור $0\le y\le 2$: ראשית נשים לב ש $x\le y\le x+1$ לכן $y-1\le x\le y$ וגם $0\le x\le 1$ לכן נחלק ל-2 מקרים כש - $0\le y\le 1$ מתקיים $0\le x\le y$ וכש- $1<y\le 2$ מתקיים $y-1\le x\le 1$.

לכן עבור התחום הראשון: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^y 1dx=y$

ובתחום השני: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{y-1}^{1} 1dx = 2-y$

דהיינו $f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 \le y \le 1 \\ 2-y & 1 < y \le 2 \end{cases}$.

עבור כל ערך אחר של y פונקציית הצפיפות המשותפת שווה לאפס ולכן $f_Y(y) = 0$.

ג. בבירור $f_X(x) \cdot f_Y(y) \ne f_{X,Y}(x,y)$ למשל קחו $x = 0, y = 1$ אגף ימין הוא 0 ושמאל $1 \cdot 1 = 1$. לכן המשתנים תלויים.

ד. פונקציית הצפיפות בתחום $0 \le y \le 2$ היא

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{1}{f_Y(y)}$$

ובכל מקום אחר היא 0 .

לכן $X|Y = y \sim \begin{cases} U(0,y) & 0 \le y \le 1 \\ U(y,2) & 1 < y \le 2 \end{cases}$

ה. מאחר ש $Y|X = x \sim U(x, x+1)$ נקבל ש $E(Y|X) = \frac{X+(X+1)}{2} = X + \frac{1}{2}$.

ו. $E(Y) = E_X\left(E_{Y|X}(Y|X)\right) = E\left(X + \frac{1}{2}\right) = E(X) + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$