תרגילים נוספים באלגברה מופשטת 1

12.07.13

מיכאל מגרל

http://www.cs.biu.ac.il/~megereli/GR.html

חלק גדול מהתרגילים הבאים הם ממקורות שונים באינטרנט או מהספרים.

חלק ראשון

1. הוכח שמבנים הבאים הם מונוידים קומוטטיביים לכל קבוצה X ומצא את חבורת הפיכים שלהם.

א. $(P(X),\cup)$

ב. $(P(X),\cap)$ (כאשר $P(X):=\{A| \quad A\subset X\}$ קבוצת החזקה).

ג. $([2,5],\wedge)$ (ביחס לפעולה $a\wedge b:=\min\{a,b\}$).

2.

א. מצא מספר פעולות בינאריות מעל קבוצה X סופית בעלת $|X|=n$ אלמנטים.

ב. כמה מהן קומוטטיביות ?
(רמז: לוחות הכפל)

תשובות: א. n^{n^2} ב. $n^{\frac{n^2+n}{2}}$.

3. הוכח ש $X=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \quad a,b\in R\right\}$ אגודה (אומרים גם *חבורה למחצה*) לגבי הכפל.

האם יש יחידה ?

האם יש *יחידה מימין* ?

האם יש *יחידה משמאל* ?

4. האם המערכת הבאה (לגבי: הכפל, החיבור של מטריצות ממשיות)

$$A:=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}: \quad a^2+b^2>0\right\}$$

$$B:=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}: \quad ac\neq 0\right\}$$

$$C:=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0\right\} \quad D:=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : xy \neq 0\right\}$$

$$E:=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} : \quad axz \neq 0\right\} \qquad F:=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\right\}$$

(מטריצות משולשות עליונות)

$$H:=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad a,b,c \in R\right\}$$

היא: אגודה, מונויד, חבורה (אבלית) ?

5. א. הוכח שלכל קבוצה X האוסף $X^X = Map(X,X) = \{f : X \to X\}$ של פונקציות מהווה מונויד עם $|X|^{|X|}$ אלמנטים ביחס להרכבה.

ב. בנו לוח הכפל במקרה של $X = \{a,b\}$.

ג. נסמן $S(X) = Gr(X^X)$ "חבורת הפיכים" של מונויד X^X. הוכח שאם $|X| = n$ אז $|S(X)| = n!$.

ד. בנה לוח של $S(X)$ עבור $X = \{a,b,c\}$.

ה. במונויד $Map(N,N)$ מצא איבר לא הפיך שהוא הפיך מימין (או שמאל) בלבד.

6. א. $(Mat_{n\times n}(C),\cdot)$ מונואיד ו- $(Mat_{n\times m}(C),+)$ חבורה קומוטטיבית (אומרים גם *אבלית*).

ב. הוכח כי $(C[a,b],\cdot)$ מונואיד ו- $(C[a,b],+)$ חבורה.

ג. תאר את "חבורת הפיכים" $Gr(C[a,b],\cdot)$.

7. הוכח כי לכל מונויד $(X,\cdot)$ קבוצה $P_*(X)$ של תת קבוצות לא ריקות מגדירה מונויד לגבי כפל טבעי $A \bullet B := \{a \cdot b \mid \quad a \in A, b \in B\}$.

מה הם ההפיכים ב $(P_*(X),\bullet)$?

8. א. בנו לוחות של Z_2, S_2. הוכח כי קיים איזומורפיזם בין החבורות הנ"ל.

ב. הוכח כי כל חבורה עם 2 אלמנטים איזומורפית ל Z_2.

9. תהי G חבורה . הוכח:

א. $a^2 = e \Leftrightarrow a = a^{-1}$.

ב. אם $x^2 = e$ לכל $x \in G$ אז G אבלית.

ג. $(a^{-1}ba)^k = a^{-1}b^k a$.

ד. G אבלית אם ורק אם $(ab)^2 = a^2b^2$ לכל זוג $a,b \in G$.

10. הוכח שמעל כל קבוצה X קיימת פעולה בינארית $*$ כך ש $(X,*)$

א. אגודה.

ב. מונויד קומוטטיבי.

ג. חבורה (קל אם X סופית !).

11. יהי a אלמנט לא ניטרלי בחבורה G ועבור אלמנט מסוים b מתקיים $a^4b = ba^5$.

הוכח ש $ab \neq ba$.

12. א. הוכח שכל חבורה עם 3 אלמנטית איזומורפית עם Z_3

(ז"א יש רק חבורה אחת עד כדי איזומורפיזמים עם 3 אלמנטים).

ב. תן דוגמא של 2 חבורות לא איזומורפיות בעלות 4 אלמנטים.

13. פתור את המשוואה $a^3xb = ab^2ab$ בחבורה S_3 כאשר

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

14. למצוא את $U_8 := Gr(Z_8,\cdot)$ ו- $U_{10} := Gr(Z_{10},\cdot)$.(חבורת הפיכים) לחשב טבלת הכפל והוכח שהן לא איזומורפיות.

15. פתור את המשוואות במונואיד $(Z_n,\cdot)$:

א. $\bar{7}x = \overline{12}$ ב Z_{34}

ב. $\bar{3}x = \overline{55}$ ב Z_{2000}

ג. $\bar{5}x = \overline{150}$ ב Z_{30} .

16. חבורת Heisenberg

א. הוכח ש $R \times R^*$ חבורה ביחס לפעולה

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) := (x_1 + y_1x_2, y_1y_2)$$

ב. הוכח כי $C \cong (R \times R^*, \bullet)$ (ראה תרגיל 4).

17. כתוב לוחות הכפל של כל המבנים בעלי 2 איברים $\{a,b\}$.

כמה מהם: אגודות, מונוידים, חבורות ?

.18

א. מצאו דוגמה של אגודה עם 2 או 3 אלמנטים שאיננה חבורה.

ב. אותה שאלה עם n אלמנטים.

ג. נניח S אגודה סופית שיש בה צמצום משמאל (או מימין) . הוכח ש S חבורה.

ד. מצאו דוגמה של מונויד שיש בו צמצום אבל איננו חבורה.

.19 תהי S אגודה. הוכיחו: S חבורה אם ורק אם לכל $a,b \in S$ קיימים פתרונות יחידים למשוואות $ya=b, ax=b$.

.20 בקבוצה $G=R\setminus\{-1\}$ (ממשיים ללא $\{-1\}$) נגדיר פעולה $*$ כאשר

$$a*b=a+b+a\cdot b$$

א. הוכח ש- $(G,*)$ חבורה אבלית.

ב. לפתור את המשוואה $2*x*3=1$.

.21 הוכח כי:

א. כל אגודה היא תת אגודה של מונויד מסוים.

ב. קיים מונויד סופי שהוא לא יכול להיות תת מונויד של חבורה מסוימת.

.22 נניח X מונויד. הוכח שאם כל איבר הפיך מימין אז X חבורה.

.23 הוכח כי אגודה סופית היא חבורה אם ורק אם ניתן לצמצם משמאל ומימין בה.

.24 הוכח כי $Z_2 \oplus Z_2$ חבורה אבלית לא ציקלית וקיים איזומורפיזם $Z_2 \oplus Z_2 \cong (P(\{1,2\},\Delta)$.

.25 תן דוגמא של חבורה אינסופית שבה $x^2=e$ עבור כל איבר x .

(רמז: ראה תרגיל הבא או $Z_2^{\aleph_0}$).

.26 הוכח כי $P(X)$ קבוצת החזקה ביחס להפרש סימטרי $A\Delta B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ היא חבורה.

.27 תאר אידמפוטנטים במנוידים:

א. $(Z_{20},\bullet)$

ב. $(X^X,\circ)$ כאשר $X=\{a,b\}$.

.28 נניח $(X,\cdot)$ מונויד.

א. לכל אידמפוטנט $a\in X$ הוכח ש

$$aXa:=\{axa\mid \quad x\in X\}$$

מונויד לגבי פעולת הצמצום ועם נייטרלי a .

ב. נניח $Y\subseteq X$ תת אגודה כך ש Y מונויד עם נייטרלי a . הוכח ש $Y\subseteq aXa$.

.29 הוכח שכל מונויד קומוטטיבי עם תכונת צימצומים ניתן לשכן לתוך חבורה קומוטטיבית.

(הדרכה: חיקוי של בניית Q_+ מ- $(N,\cdot)$.

חלק שני

1. נניח $a_1 \equiv a_2 \bmod n, \quad b_1 \equiv b_2 \bmod n,$. הוכח ש
$a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \bmod n, \quad a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \bmod n$.

2. א. הוכח כי $\overline{n-1}^{-1} = \overline{n-1}$ במונויד $(Z_n, \bullet)$.

ב. הוכח שאם $n = p$ ראשוני אז ב Z_n $\bar{x}^{-1} = \bar{x}$ אם ורק אם $\bar{x} = \bar{1}$ או $\bar{x} = \overline{p-1}$.

3. א. נסמן $U_n = Gr(Z_n, \cdot)$ (נקרא "חבורת Euler ") . מצא את $|U_{2003}|$ ו- $|U_{2002}|$.
ב. הוכח כי $|U_{p^k}| = p^k - p^{k-1}$ לכל p ראשוני.

4. . א. בחבורה U_8 מצא סדר $o(x)$ לכל אלמנט $x \in U_8$.

ב. הוכח ש בחבורה U_8 יש 4 אלמנטים אבל היא לא איזומורפית לחבורה Ω_4 .

5. א. הוכח שכל חבורה ציקלית תמיד אבלית אבל ההפך לא נכון.
ב. הוכח שכל חבורה עם פחות מ 6 אלמנטים היא אבלית.

6. הוכח שלכל אלמנט a בחבורה G האוסף $< a > := \{a^k : k \in Z\}$ הוא תת-חבורה.

7. אילו מתת-חבורות ציקליות הבאות הן סופיות (מצא מספר אלמנטים) או אינסופיות:

א. $< a = cis18^\circ >$ ב $(C \setminus \{0\}, \cdot)$
ב. $< a = 1 + i >$ ב $(C \setminus \{0\}, \cdot)$
ג. $< a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$ ב $M_2(R)$
ד. $< a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$ ב $M_2(R)$.

8. מצא סדר $o(a)$ במקרים הבאים:

א. $a = 5$ בחבורה $G = ((0, \infty), \cdot)$.
ב. $a = \bar{5}$ בחבורה $G = Z_{75}$.
ג. $a = \overline{35}$ בחבורה $G = Z_{75}$.

9. הוכח ש H תת-חבורה של Z אם ורק אם קיים $k \in Z$ כך ש $H = kZ$.

10. ב- Z תאר תת- חבורות :

א. $4Z \cap 6Z$
ב. $4Z + 6Z$.
ג. תנו הכללות עבור $mZ + nZ, \quad mZ \cap nZ$.

11. הוכח :

א. $o(a) = 1 \Leftrightarrow a = e$

ב. $o(a) = 2 \Leftrightarrow a = a^{-1} \; \& \; a \neq e$

ב. $o(a)=o(a^{-1})$

ג. $o(a^i)\le o(a)$

ד. $a^i=e\Leftrightarrow o(a)\,|\,i$

ה. $o(a)=|<a>|$

ו. $<a>\le G$ לכל $a\in G$.

(כאשר $<a>:=\{a^k:\quad k\in Z\}$).

12. נניח $o(a)=n=n_1n_2$. הוכח ש $o(a^{n_1})=n_2$.

13. נניח G חבורה ציקלית סופית. הוכח שלכל $x\in G$ מתקיים $x^{|G|}=e$.

14. נניח $o(a)=n$ סופי. הוכח ש $o(a^i)=\dfrac{n}{(n,i)}$.

15. א. בחבורה $\Omega_{40}=<w>$ מצא סדר של ω^{14} .

ב. כמה יוצרים יש ב Ω_{40} ?

(ז"א כמה אלמנטים $b\in\Omega_{40}$ מקיימים $<b>=\Omega_{40}$?)

ג. כמה יוצרים יש בחבורה ציקלית אינסופית ?

16. א. נניח בחבורה מסוימת G נתונים שני אלמנטים a,b כך שמתקיים:

$ab=ba$ וגם $(o(a),o(b))=1$.

הוכח : $o(ab)=o(a)o(b)$.

ב. תהי $GL_2(R)$ חבורת מטריצות הפיכות 2×2 . נסמן:

$$b=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\qquad a=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

הוכח: $o(a)=4,\quad o(b)=3,\quad o(ab)=\infty$.

17. א. הוכח שאם H_i תת-חבורה של G לכל $i\in I$ אז גם $\bigcap_{i\in I}H_i$ תת-חבורה.

ב. תן דוגמא שבה H_1,H_2 תת-חבורות אבל לא $H_1\cup H_2$.

18. הוכח שאם $H_1\le H_2\le\cdots\le G$ אז גם $H_\infty\le G$ כאשר $H_\infty=\bigcup_{i\in N}H_i$.

19. נסמן $\Omega_\infty:=\bigcup_{i\in N}\Omega_i$. הוכח :

א. $\Omega_\infty\le C\setminus\{0\}$

ב. $o(x)<\infty$ לכל $x\in\Omega_\infty$.

ג. Ω_∞ לא ציקלית.

ד. כל תת קבוצה סופית יוצרת תת חבורה סופית.

20. נניח X,Y חבורות. מעל קבוצה $X\times Y$ נגדיר פעולה בינארית (טבעית) :

$$(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2):=(x_1x_2,y_1y_2)$$

הוכח:

א. $(X\times Y,\bullet)$ גם חבורה.

ב. היא אבלית אם ורק אם X,Y אבליות .

21. G חבורה סופית. הוכח שקיים n כך ש $g^n=e$ לכל $g\in G$.

22. פתור את המשוואות הבאות:

$\overline{71}x=\overline{55}$ ב Z_{2000}

$61x\equiv 5 \bmod 234$

$177x\equiv 2003 \bmod 661$.

23. א. הוכח שבכל חבורה G תמיד מתקיים $o(x)=o(gxg^{-1})$.

ב. נניח $a\in G$ הוא איבר יחיד בעל הסדר $o(a)=k$ בחבורה G. הוכח ש a מתחלף עם כל אלמנט של G (שקול: $a\in Z(G):=\{x\in G: xz=zx \quad \forall z\in G\}$).

24. נניח G חבורה מסדר זוגי (ז"א $|G|=2n$). הוכח שקיים איבר מסדר 2.

25. תהי $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ חבורה אבלית ונגדיר $b=a_1a_2\cdots a_n$.

הוכח:

א. $b^2=1$.

ב. אם ב G אין איבר מסדר 2 אזי $b=e$.

ג. אם ב G יש איבר יחיד מסדר 2 אז הוא b.

26. הוכח:

א. $SL_n(Q)\le SL_n(R)\le GL_n(R)$

ב. $O_n(R)\le GL_n(R)$

ג. $Scal_n(R)\le D_n(R)\le GL_n(R)$

(סימון: $O_n(R):=\{A\in GL_n(R) \mid \quad A\cdot A^t=I\}$ מטריצות אורתוגונאליות,

$D_n(R)$ מטריצות אלכסוניות , $Scal_n(R)$ מטריצות סקלריות)

ה. תאר ת"ח $Scal_n(R)\cap O_n(R)$.

27. נניח H,K תתי חבורות של G. הוכח:

א. אם $H\le G$ & $K\le H$ אזי $K\le G$.

ב. $H \cup K \leq G$ אם ורק אם $K \subset H$ או $H \subset K$.

ג. $H \cap K \leq G$ (נכון גם עבור אינסוף תתי חבורות).

ד. $HK = KH \Rightarrow HK \leq G$.

28. בחבורה G נסמן $G^m := \{g^m \mid g \in G\}$. הוכח שאם G אבלית אז מתקיים: $G^m \leq G$.

חלק שלישי

1. עבור החבורות $\Omega_{12}, \quad Z_{12}$ מצא את:

א. סריג תת-חבורות.

ב. היוצרים.

2. כמה יוצרים יש בחבורה ציקלית הבאה:

א. $\Omega_{2001}, \Omega_{2002}, \Omega_{2003}$.

ב. $G = < cis(\frac{17}{25}\pi) >$

ג. $G = < cis(\pi\sqrt{2}) >$

(**הדרכה**: הוכח תחילה ש G אינסופית (ראה תרגיל הבא) והסק שיש רק 2 יוצרים).

3. הוכח שתת-חבורה ציקלית $G = < cis\alpha >$ של $C \setminus \{0\}$ היא סופית אם ורק אם $\frac{\alpha}{\pi} \in Q$.

4. תהי V_4 "חבורת סימטריות של מלבן". הוכח כי חבורה עם 4 אלמנטים איזומורפית ל V_4 או Z_4.

5. הסבר מדוע בחבורה דיהדרלית D_n מתקיים:

א. $D_n = < a, \sigma >$ (כאשר a סיבוב בזוית $2\pi/n$ ו σ אחד מהשיקופים.

ב. $a^n = \sigma^2 = e$, $\sigma a \sigma = a^{n-1} = a^{-1}$.

ג. $C_n := < a > \leq D_n$ (תת חבורת סיבובים מכילה n אלמנטים).

ד. $(a^i\sigma)^2 = e, \quad \sigma a^j \sigma = a^{-j}$.

ה. $(a^i\sigma)(a^j\sigma) = a^{i-j}$.

6. א. תהי $GL_2(R)$ חבורת מטריצות הפיכות 2×2. נסמן:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכח: $o(a) = 4, \quad o(b) = 3, \quad o(ab) = \infty$.

ב. תן דוגמא של חבורה סופית G ואיברים $a, b \in G$ כך ש $o(a) = o(b) = 2, o(ab) = 4$.

7. חבורה G נקראת *נוצרת סופית* (קיצור: נ"ס) אם קיימת תת-קבוצה סופית $a_1, a_2, \cdots, a_n$ כך ש $G = < a_1, a_2, \cdots, a_n >$.

אילו מבין החבורות הן נ"ס:

$$D_n \quad Q \quad (Q \setminus \{0\}, \cdot) \quad Z \oplus Z \quad Z \quad \Omega_\infty \quad Z \times D_{100}$$

8. הוכח שאם X, Y חבורות נ"ס אז גם $X \times Y$ היא נ"ס.

9. תהי $G = < a, b >$. הוכח :

א. $G = < a^{-1}, b >$

ב. $G = < a, ab >$

ג. $G = < ab, ab^{-1}a^{-1} >$

10. בחבורה S_{10} נתונות תמורות :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b = (4,5,6)(5,6,7)(6,7,1)(1,2,3)(2,3,4)(3,4,5)$$

רשם אותן כמכפלה של עגילים זרים וקבע את הסדר וזוגיות של a, b, aba^{-1}, bab^{-1}

11. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות היא "קבוצת יוצרים" של חבורה S_n

א. $\{(1,i) \mid \quad i \in \{2,3,...,n\}\}$

ב. $\{(i,i+1) \mid \quad i \in \{1,2,...,n-1\}\}$ הדרכה: שים לב ש $(1,i)(1,j)(1,i) = (i,j)$

ג. $\{(1,2), \quad (1,2,3), \quad (1,2,4),...,(1,2,n)\}$

ד. $\{(1,2), \quad (1,2,...,n)\}$

הדרכה: שים לב שתמיד: $b(a_1, a_2, ..., a_k)b^{-1} = (b(a_1), b(a_2), ..., b(a_k))$

12. א. מצא תת-חבורה מסדר 45 בחבורה S_{15}.

ב. עבור אילו n חבורה A_n היא ציקלית.

13. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות היא "קבוצת יוצרים" של חבורה $(n \geq 3) \quad A_n$.

א. $\{(i,j,k) \mid \quad i,j,k \in \{1,2,...,n\}\}$

ב. $\{(1,2,3), \quad (1,2,4),...,(1,2,n)\}$

14. א. כמה איברים מסדר 2 קיימים בחבורה A_n עבור $n \leq 8$?

ב. כמה איברים מסדר 3 קיימים בחבורה S_3 עבור $n \leq 6$?

15. נניח $H \leq G$. נגדיר יחס "מודולו H" ב G :

נסמן $a \equiv b \bmod H$ אם $a^{-1}b \in H$.

הוכח:

א. היחס הוא יחס שקילות ב G .
ב. מחלקות השקילות הן בדיוק קוסטים (הערה: אומרים גם *מחלקות*) שמאליים .
ג. נסח הגדרה "מודולו H " עבור קוסטים ימניים.

16. הוכח שהאינדקס $[G:H]$ הוא שווה עבור קוסטים שמאליים או ימניים.

(רמז: הוכח שההתאמה $aH \mapsto Ha^{-1}$ מגדירה העתקה חח"ע ועל בין קוסטים שמאליים וימניים) .

17. תאר את הקוסטים (שמאליים בלבד) של חבורה G לגבי תת-חבורה H במקרים הבאים:

א. $G = Z, \quad H = 5Z$
ב. $G = R^2, \quad H = R \times \{0\}$
ג. $G = R^2, \quad H = \{(t,3t) \mid t \in R\}$
ד. $G = \Omega_{15}, \quad H =< w^5 >$
ה. $G = C \setminus \{0\}, \quad H = \{z \in C \mid \ \| z \| = 1\}$
ו. $G = X_1 \times X_2, \quad H = X_1 \times \{e\}$
ז. $G = U_{30}, \quad H = \{\bar{1}, \overline{11}\}$
ח. $G = S_n, \quad H = A_n$
ט. $G = GL_n(R), \quad H = SL_n(R) = \{A \mid \ \det(A) = 1\}$
י. $G = D_n, \quad H = C_n$

18. נתון ש G חבורה מסדר 35 (ז"א $|G| = 35$) , $H \le G, H \ne G$. הוכח ש H חבורה ציקלית.

19. הוכח או הפרך:

א. ב- S_7 יש תת-חבורה עם 11 אלמנטים.

ב. ב- S_3 אין תת-חבורה עם 6 אלמנטים.

ג. ב- A_5 קיים אלמנט $a \ne e$ כך ש $a^7 = e$.

ד. כל תת חבורה H של S_3 היא ציקלית.

ה. כל תת חבורה $H \ne S_3$ של S_3 היא ציקלית

ו. קיימת ת"ח לא ציקלית עם 4 אלמנטים ב- S_4 .

20. נניח G סופית, $K \le H \le G$. הוכח: $[G:K] = [G:H] \cdot [H:K]$.

21. **(הכללת משפט Euler)** נניח $(a,n) = 1, \quad a \equiv b \bmod n, \quad s \equiv t \bmod \varphi(n)$.

הוכח: $a^s \equiv b^t \bmod n$.

22. פתור:

א. $9^{62} \equiv 16x \bmod 31$

ב. $19^{50} \equiv 7x \bmod 34$ כך ש $400 < x < 500$.

23. מצא 2 ספרות אחרונות של המספרים:

א. 13^{41}

ב. 37560523^{323}

ג. 20001349740217^{1999}

24. א. הוכח שבחבורה Ω_{71} אין תת-חבורה אמיתית (ז"א השונה מ $\{e\}$, Ω_{71}).

ב. הוכח שבכל חבורה *אינסופית* יש תת חבורה אמיתית.

ג.. הוכח שחבורה נתונה לא מכילה תת חבורה אמיתית אם ורק אם $|G|=p$ מספר ראשוני .

25. הוכח שהמרכז S_X של חבורה סימטרית טריוויאלי לכל $|X|\geq 3$.

26. הוכח שחבורה A_4 (בעלת 12 אברים) לא מכילה תת חבורה בעלת 6 אברים.

27. חבורה G מכילה אבר a בעל הסדר 5 וגם אבר a בעל הסדר 7. הוכח או הפרך שבהכרח $|G|\geq 35$.

28. הוכח שכל $10^{n+1}+10^n+1$ מתחלק ב 3 לכל $n\in\mathbb{N}$.

29. נניח 2^k-1 ראשוני ו $k\geq 2$ שלם מסוים. הוכח ש k ראשוני.

30. הוכח שקיימים אינסוף ראשוניים מהטיפוס $6n-1$ כאשר $n\in\mathbb{N}$.

חלק רביעי

הגדרה: נניח $(X,\cdot)$, $(Y,*)$ חבורות. $X \xrightarrow{f} Y$. אזי f:

א. **הומומורפיזם** אם f שומרת על הפעולה: $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)*f(x_2)$.

ב. **אפימורפיזם** אם f הומומורפיזם וגם על (ז"א $\operatorname{Im} f := f(X)=Y$).

ג. **מונומורפיזם** (שיכון) אם f הומומורפיזם +חח"ע (ז"א $(x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

ד. **איזומורפיזם** אם f אפימורפיזם וגם מונומורפיזם.
אם קיים איזומורפיזם אז מסמנים $X \cong Y$.

ה. **אנדומורפיזם** אם $X = Y$ (סימון $f \in End(X)$).

ו. **אוטומורפיזם** אם $X = Y$ ו $f : X \to X$ איזומורפיזם (סימון $f \in Aut(X)$).

1. הוכח כי הרכבת הומומורפיזמים (מונו, אפי, איזו) היא הומומורפיזמים (בהתאמה: מונו, אפי, איזו).
הוכח כי $\cong$ הוא מקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות באוסף של חבורות $\{Groups\}$.

2. נניח $f : X \to Y$ הומומורפיזם חבורות. הוכח ש:

א. $f(e_X) = e_Y$.

ב. $f(x^k) = f(x)^k \quad \forall k \in Z$

ג. $O(f(x)) \,|\, O(x) \quad \forall x \in X$ (רמז: $y^m = e \Leftrightarrow O(y) \,|\, m$).
אם $f : X \to Y$ מונומורפיזם (למשל: איזו) אז $O(f(x)) = O(x) \quad \forall x \in X$.

ד. $H \le X \Rightarrow f(H) \le Y$. בפרט $\operatorname{Im}(f) \le Y$.

ה. $K \le Y \Rightarrow f^{-1}(K) \le X$.

ו. $\forall K \lhd Y \quad f^{-1}(K) \lhd X$. בפרט $\ker(f) \lhd X$.

ז. $H \lhd X \Rightarrow f(H) \lhd f(X)$. האם זה נכון שתמיד $f(H) \lhd Y$?

ח. $f : X \to Y$ מונומורפיזם אם"ם $\ker(f) = \{e_X\}$.

3. $f : X \to Y$ אפימורפיזם חבורות. הוכח:

א. אם X אבליות אז גם $f(X) = Y$ אבלית.

ב. אם X ציקלית אז גם $f(X) = Y$ ציקלית.

ג. אם X נ"ס (נוצרת סופית) אז גם $f(X) = Y$ נ"ס.

4. הוכח ש לכל חבורה X מתקיים:

א. $End(X)$ תת מונויד של X^X לכל חבורה X

ב. $Aut(X)$ חבורת הפיכים של $End(X)$.

5. א. הוכח $End(Z,+) \cong (Z,\cdot)$.

ב. תאר את המונויד $End(X)$ עבור חבורה ציקלית X.

ג. הוכח $Aut(Z,+) \cong \Omega_2$.

ד. הוכח $Aut(Z_n,\oplus) \cong U_n$.

ה. תאר את החבורה $Aut(X)$ עבור חבורה ציקלית סופית X.

ז. הוכח כי $End(Q,+) \cong (Q,\cdot)$.

6. א. הוכח שקיים אפי $Z \to Z_n$. האם הוא יחיד ?

ב. הוכח: אם $m|n$ אז יש מונומורפיזם יחיד $f:Z_m \to Z_n$. מצא אותם.

7. א. האם יתכן שחבורה G איזומורפית לת"ח שלה ? (לנמק).

ב. נניח $f:X\to Y$ הומומורפיזם לא טריוויאלי של חבורות ו $|Y|=p$ ראשוני .הוכח ש f אפי'.

ג. נניח $f:X\to Y$ הומומורפיזם לא טריוויאלי ו $|X|=p$ ראשוני. הוכח ש f מונו'.

8. מצא אפימורפיזמים טבעיים ותאר את הגרעינים במקרים הבאים:

א. $Z\to Z_n \quad R^*\to\Omega_2, \quad D_n\to Z_2, \quad S_n\to\Omega_2$.

ב. $C^*\to R_+$ (מצא 2 פתרונות טבעיים)

ג. $GL_n(R)\to R^*$

ד. $R\to T$ כאשר $\left(T:=\{z\in C: \quad ||z||=1\}\right)$ (מצא לפחות 2 פתרונות טבעיים).

9. נניח $X_1\times X_2$ מכפלה קרטזית של חבורות. נסמן: $\pi_i : X\to X_i$ הטלה טבעית

$\pi(x_1,x_2)=x_i$. הוכח:

א. π_i תמיד אפי ומצא את הגרעין.

ב. קיים מונו' $X_i\to X_1\times X_2$.

ג. $X_1\times X_2\cong X_2\times X_1$.

10. נניח $f_1:X_1\to Y_1, \quad f_2:X_2\to Y_2$ הומומורפיזמים (מונו', אפי, איזו') חבורות.

הוכח שהנוסחה $(f_1\times f_2)(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ $\quad f_1\times f_2:\ X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$

מגדירה הומומורפיזמים (מונו', אפי, איזו' בהתאמה) .

11. למצוא לפחות 5 אוטומורפיזמים שונים של החבורה הבאה $Z_4\times Z_4$.

12 א. נניח G חבורה אבלית. הוכח כי הנוסחה $x\mapsto x^3$ מגדירה אנדומורפיזם.

ב. האם הנוסחה מגדירה מונו' אפי' איזו' במקרים הבאים: $\Omega_{12},\Omega_3 \quad \Omega_4\ C^*\ R^*$.

13. נניח G חבורה אבלית סופית בת n איברים. עבור $k\in N$ קבוע נגדיר העתקה

$f:G\to G, \quad f(g)=g^k$. הוכח:

א. f אנדומורפיזם.

ב. f אוטומורפיזם אם ורק אם $(n,k)=1$.

ג. אם $(n,k)=1$ אז לכל $a\in G$ קיים פתרון יחיד למשוואה $x^k=a$.

14. הוכח או הפרך:

א. קיים מונו $GL_2(R)\to R^{16}$

ב. קיים מונו' $D_7\to S_5$

ג. קיים אפי $C^* \to (o,\infty)$

ד. קיים איזו $R \to (0,\infty)$

ה. קיים אפי $Z \to \Omega_{2003}$

ו. קיים איזו $D_5 \to \Omega_{10}$

ז. קיים אפי $Z_{60} \to D_4$

ח. קיים מונו $V_4 \to S_4$

ט. קיים אפי $Z_6 \to Z_3$

י. קיים אפי $Q \to S_5$

מצא גרעינים (במקרים של תשובות חיוביות) .

15. הוכח שקיים איזו' בין החבורות:

א. $R \quad (0,\infty)$

ב. $R^* \quad (0,\infty)\times\Omega_2$

ג. $R^* \quad R\times Z_2$

ד. $Mat_{n\times m}(Z_2) \quad {Z_2}^{nm}$

16. הוכח שלא קיים איזו' בין החבורות :

א. $(Q,+) \quad Q_+ := Q\cap((0,\infty),\cdot)$

ב. $R^* \quad R$

ג. $C^* \quad C$

17. א. הוכח ש<u>המרכז</u> $Z(G):=\{x\in G \mid \quad gx=xg \quad \forall g\in G\}$

הוא תמיד ת"ח נורמלית ב G .

ב. הוכח ש G אבלית אם ורק אם $Z(G)=G$.

18. * הוכח ש $Z(GL_n(R))=Scal_n(R)$ (כאשר $Scal_n(R)$ מטריצות סקלריות).

19. מצא מרכז של:

א. S_n

ב. חבורה דיהדרלית.

ג. חבורת Heisenberg .

20. (הצמדות) נניח G חבורה ו- $g\in G$. נגדיר ("הצמדה ע"י g) .

$$\alpha_g : G\to G \qquad \alpha_g(x)=gxg^{-1}$$

הוכח:

א. α_g אוטומורפיזם (נקרא **אוטומורפיזם פנימי**).

ב. $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$

ג. $o(\alpha_g(x)) = o(x)$

ד. העתקה $\gamma : G \to Aut(G)$ היא הומומורפיזם של G לתוך "חבורת אוטומורפיזמים שלה". מסמנים $\mathrm{Im}\gamma := Inn(G)$. תאר את הגרעין $\ker\gamma$.

ה. תן דוגמא של אוטומורפיזם לא פנימי בחבורה מסוימת.

21*. הוכח כי כל הומומורפיזם <u>רציף</u> $f : R \to R$ של R לתוך עצמה היא מהצורה של $f(x) = cx$ עבור $c \in R$ קבוע מסוים.

22. א. הוכח שהפונקציה

$$f : T \to GL_2(R) \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

מגדירה מונומורפיזם כך ש $f(T) = O_2(R) \cap SL_2(R)$.

ב. הוכח שלכל חבורה ציקלית יש מונומורפיזם לתוך חבורת מטריצות אורתוגונליות

23. (הצגה מטריציאלית)

א. מצא הצגה מטריציאלית של : S_3, Z_6, Z, C^*, $R^* \times R^*$, R.

ב. הוכח שכל חבורה סופית עם n אלמנטים איזומורפית לתת-חבורה מסוימת של $GL_n(R)$

(רמז: רדוקציה למשפט Cayley).

24. ** א. הוכח שכל חבורה G היא איזומורפית לתת-חבורה מסוימת של חבורת איזומטריות $Is(M)$ של מרחב מטרי מסוים (M,d).

ב. הוכח שמרחב M אפשר תמיד לבחור כמרחב בנך $(M, \|\cdot\|)$ (תזכורת: מרחב בנך הוא מרחב נורמי שלם) ומונומורפיזם מ- G לתוך $LIs(M)$ = חבורת איזומטריות **<u>ליניאריות</u>** על $f : M \to M$.

25. תן דוגמא של חבורה G, אלמנטים $a, b \in G$ ותת חבורה H כך ש $(aH)(bH)$ לא שווה ל abH.

26. הוכח שחיתוך של תתחבורות נורמליות תת חבורה נורמלית.

27. נניח $[G:H] = 2$. הוכח ש H נורמלית ב G. הסק:

א. A_n נורמלית ב S_n .

ב. C_n נורמלית ב D_n .

28. בחבורה S_3 מצא מסלול הצמדה (ז"א $[a]$ ו- $[H]$) של :

א. אלמנט $a = (1,2)$

ב. של ת"ח $H = \{e, (1,2)\}$.

(הגדרה: $[a]:=\{gag^{-1} \mid \quad g\in S_3\}$ $\quad [H]:=\{gHg^{-1} \mid \quad g\in S_3\}$)

27. א. $H\le G \Rightarrow xHx^{-1}\le G$.
ב. אם $H\le G$ סופי, $|H|=k$ ו- אין ל- G ת"ח נוספת מסדר k, אזי $K\lhd G$.

ג. אם $K\le H\lhd G$ ו- H ציקלית סופית אז $K\lhd G$.
28.. עבור $H\le G$ נגדיר $N(H):=\{g\in G:\quad gH=Hg\}$ ("נורמליזטור" של H ב- G).
הוכח: א. $N(H)\le G$ ו- $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$.

ב. $H\lhd N(H)$. ואם $H\lhd K\le G$ אזי $K\le N(H)$.

29. (נורמליות לא טרנזיטיבית !) תהי $D_4=<a,\quad \sigma>$ היא חבורה דיהדרלית. נסמן:

$K=\{e,\sigma a\},\quad H=\{e,\sigma a,a^2,\sigma a^3\}$. הוכח:

H ת"ח נורמלית ב D_4 , K ת"ח נורמלית של H אבל K לא נורמלית ב D_4.

30. נניח $f:G\to Y$ הומומורפיזם. הוכח ש $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a\equiv b \bmod(\ker f)$.

31. הוכח:

א. $S_n/A_n\cong\Omega_2$
ב. $R/Z\cong T$ כאשר $T=\{z\in C \mid \|z\|=1\}$
ג. $C^*/T\cong(0,\infty)$
32. הוכח ש $|Y|$ מחלק את $|X|$ לכל אפימורפיזם $f:X\to Y$ חבורות.

33. נניח H_i ת"ח נורמלית ב X_i לכל $i\in\{1,2\}$. הוכח:

א. $H_1\times H_2$ נורמלית ב $X_1\times X_2$.
ב. $X_1\times X_2/H_1\times H_2\cong X_1/H_1\times X_2/H_2$
ג. $R^2/Z^2\cong T^2$.
ד. קיים אפי $C_{20}\times C_{27}\to C_3\times Z_4$.
34. תאר תמונות אפימורפיות של: $S_3,\quad D_3,\quad \Omega_{12},\quad C_{23},\quad Z$.

35. הוכח שכל חבורה אבלית בעלת קבוצת יוצרים עם n איברים היא חבורת מנה של Z^n.
36. הוכח $(m,n)=1 \Leftrightarrow C_m\times C_n\cong C_{mn}$

37. מצא מספר חבורות אבליות שונות (עד כדי איזו') :

א. עם 71 אלמנטים.
ב. עם 35 אלמנטים.
ג. עם 18000 אלמנטים.
ד. עם 20000 אלמנטים.

38.
א. אילו מהחבורות הבאות הן איזומורפיות :
$Z_2\times Z_{36}\quad Z_6\times Z_{12}\quad Z_2\times Z_4\times Z_9\quad Z_8\times Z_9\quad Z_2\times Z_3\times Z_3\times Z_4\quad Z_{72}$.
ב. כמה חבורות אבליות בגודל 10000 קיימות (עד כדי איזומורפיזם) ?
ג. כמה מהן מכילות ת"ח **ציקלית** בגודל 125 ?

39. (מכפלה חצי-ישרה של חבורות)

נניח $\alpha : Y\times X \to X$ פעולה של חבורה Y מעל חבורה X כך שכל הזזה $\alpha_y : X\to X$

אוטומורפיזם של X. מעל קבוצה $G := X\times Y$ נגדיר פעולה $G\times G\to G$ ע"י

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1\cdot y_1(x_2), y_1\cdot y_2)$$

כאשר $y_1(x_2)$ מסמן $\alpha_{y_1}(x_2)$. הוכח:

א. $(G,*)$ חבורה. סימון: $G := X\times_s Y$.

ב. $Y \cong \{e_X\}\times Y \le G$, $X\cong X\times\{e_Y\}\lhd G$.

ג. $Y\cong G/X$.

ד. אם הפעולה $\alpha : Y\times X\to X$ טריוויאלית (ז"א $y(x)=x \quad \forall\, x\in X, y\in Y$)

אז $X\times_s Y\cong X\times Y$.

40. הצג חבורות הבאות כמכפלה חצי-ישרה (ראה התרגיל הקודם):

א. $\Omega_{30}\cong\Omega_5\times\Omega_6$

ב. $D_n\cong C_n\times_s Z_2$

ג. $C:=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} : a\neq 0\right\}\cong R\times_s R^*$

(הדרכה: הגדר $\alpha : Y\times X\to X, \quad y(a,b):=(a+yb,b)$).

ד. חבורת Heisenberg $\cong R^2\times_s R$

41. הוכח או הפרך: חבורה סימטרית S_n לכל $n\in N$ איזומורפית לחבורת מנה של חבורה חופשית $F(a,b)$ מעל קבוצה $X=\{a,b\}$ של שני סמלים.

(*חבורה חופשית* $F(X)$ היא חבורה שקבוצת היוצרים שלה X לא מקיימת אף יחס לא טריוויאלי.

איברים של $F(X)$ הם *מילים* שמרכיבים אותן דרך אותיות מ X. ה פעולה היא "הדבקה" -- כתיבה אחת אחרי שנייה.)

42. מצאו חבורות לא איזומורפיות X,Y כך ש X איזומורפית עם תת חבורה של Y ו Y איזומורפית עם תת חבורה של X.

43. הוכיחו שתמיד מתקיים: $[G:(A\cap B)]\le[G:A]\cdot[G:B]$

(אחת מהגישות היא: שימוש בפעולת עזר של חבורת G מעל קבוצה מסוימת X).

44. נניח $G/Z(G)$ ציקלית הוכח ש G אבלית.

45. נניח $|Z(G)|=p^{n-1}$ $|G|=p^n$. הוכח ש G אבלית.

46. נניח G חבורה אבלית סופית עם n איברים. אזי לכל m טבעי המחלק את n קיימת ת"ח $H\le G$ עם $|H|=m$.

חלק חמישי

1. בדוק שבדוגמאות הבאות חבורה G פועלת מעל קבוצה X :

א. $X := G \quad g \circ x = gx$

ב. $X := G \quad g \circ x = gxg^{-1}$. מה הן נקודות שבת ?

ג. $X := P(G) \quad g \circ A = gAg^{-1}$

ד. $G := S_n \quad X := \{1,2,\cdots,n\} \quad g \circ x = g(x)$

ה. $G := S_n \quad X := F[x_1, x_2, \cdots x_n] \quad g \circ f(x_1, \cdots x_n) = f(x_{g(1)}, \cdots x_{g(n)}\}$

ו. $G := GL_n(F) \quad X := F^n \quad M \circ v := vM$

ז. $G := T \quad X := R^2$

ח. $H \le G \quad X := G/H, \quad g \circ aH = gaH$

ט. $X := sub(G) := \{H \mid H \le G\} \quad g \circ H = gHg^{-1}$.

2. א. הוכח ש $a \in C(G) \Leftrightarrow [a] = \{a\} \Leftrightarrow N(a) = G$
($C(G) = Z(G)$ המרכז)

כאשר $[a] = \{gag^{-1} \mid \quad g \in G\}$ מסלול הצמדה (המחלקה) $[a]$ של a

לגבי פעולת הצמדה של G מעל G.

ו $N(a) = \{g \in G \mid \quad ag = ga\}$ (צנטרליזטור של a) .

ב. הוכח שאם בחבורה G יש איבר <u>יחיד</u> a מסדר 2 אז a שייך למרכז.

(רמז: תמיד $o(gxg^{-1}) = o(x)$).

ג. הוכח $N(a) \le G, \quad C(G) = \bigcap\{N(a) \mid \quad a \in G\}$.

ד. $< a > \le N(a)$.

הערה: (חשיבות של $N(a)$) תמיד $|[a]| = [G : N(a)]$.

3. הוכח שאם $G/C(G)$ חבורה ציקלית אז G אבלית.

הגדרה: חבורה G נרקאת *פשוטה* אם כל ת"ח נורמלית היא G או $\{e\}$.

דוגמאות לחבורות פשוטות למשל: A_5, C_p (p ראשוני).

4. נניח G חבורה המכילה אלמנט a שיש לו בדיוק 2 צמודים. הוכח ש G אינה פשוטה
5. נסמן: $Sub(G) := \{H \mid \quad H \le G\}$ אוסף של ת"ח. נגדיר

$$G \times S(G) \to S(G) \quad g \bullet H = gHg^{-1}$$

א. הוכח ש $\bullet$ מגדירה פעולה של G מעל $Sub(G)$. מה הן נקודות שבת ?

אומרים שת"ח $H_1, \quad H_2$ צמודות אם $H_2 = gH_1g^{-1}$ עבור $g \in G$ מסוים.

נסמן: $H_1 \sim H_2$.

ב. הסק כי זה מגדיר שקילות ב $Sub(G)$.

ג. הוכח שאם $H_1 \sim H_2$ אז הן איזומורפיות.

6. עבור $H \le G$ נגדיר $N(H) := \{g \in G \mid \quad gHg^{-1} = H\}$ (נורמליזטור של H ב G).

א. הוכח $N(H) \le G$, H ת"ח נורמלית ב $N(H)$.

ב. הוכח $N(H) = G \Leftrightarrow H$ ת"ח נורמלית ב $G \Leftrightarrow [H] = \{H\}$

ז"א H צמוד רק עם H

ד. הסבר מדוע מספר ת"ח הצמודות ל H שווה $[G : N(H)]$.

7. תאר את האלמנטים של $N(a)$ בחבורה G במקרים הבאים:

א. $G = S_3 \quad a = (1,3)$

ב. $G = S_4 \quad a = (2,3)$

ג. $G = S_3 \quad a = ((1,3,2)$

ד. $G = S_4 \quad a = (1,3,2)$

8. בחבורה S_7 מצא α כך ש $\alpha(3,1)(5,4,6) = (2,7)(4,3,5)\alpha$.

9. מצא את כל הטיפוסים אפשריים לגבי הצמדה (ז"א נציגים של המסלולים) בחבורות הבאות: $S_2, \quad S_3, \quad S_4, \quad S_5$.

10. מצא גודל של המסלול $|[a]|$ בחבורה S_n לגבי הצמדה במקרים הבאים:

א. $a = (1,2)$

ב. $a = (1,2,3)$

ג. $a = (1,2,\cdots,k)$ (תשובה: $\dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k}$).

הערה: נניח $\alpha = (\cdots)(\cdots)\ldots(\cdots) \in S_n$ בעל טיפוס $n_1^{k_1}\ n_2^{k_2}\ \cdots n_t^{k_t}$.

(k_1 עגילים עם האורך n_1, k_2 עגילים עם האורך n_2, ...)

אזי $|[\alpha]| = \dfrac{n!}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_t^{k_t} k_1! k_2! \cdots k_t!}$.

11. מצא כמות אלמנטים המתחלפים עם :
א. $(1,2,\cdots,k)$ בחבורה S_n.

ב. $(1,2)(3,4)$ בחבורה S_n.

12. מחלקות הצמידות בחבורה A_5 הן בגדלים (בשורה שנייה יש נציגים) :

12	12	20	15	1
(12354)	(12345)	(123)	(12)(34)	e

הוכח ש A_5 פשוטה.

13. תאר את : $[x], G_x, X_g, F$ עבור הפעולות של G מעל X במקרים הבאים:

א. $G =< (1,3,6) > \quad X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
ב. $G =< (1,3,4), \quad (3,5) > \quad X = \{1,2,3,4,5,6\}$
ג. $G = R^* \quad X = R$
ד. $G = R^* \quad X = R^2$ (כפל בסקלר) .
ה. (חבורת סיבובים=) $G = T \quad X = R^2 \quad X = R^2$

14. חבורה G בעלת 35 אלמנטים פועלת מעל קבוצה עם 13 אלמנטים.
הוכח שקיימת נקודת שבת.

15. תהי G "חבורת- p" , כלומר, $|G|= p^n$, כאשר p ראשוני .
א. נניח $G \times X \to X$ פעולה מעל קבוצה סופית X . הוכח
$$| X |\equiv | F | \bmod p$$
כאשר F קבוצה של נקודות שבת.

ב. הוכח שבמרכז $C(G)$ יש לפחות p אלמנטים.

ג. נניח $|G|= p^2$. הוכח ש G אבלית.

ד. הוכח שקיימת ת"ח נורמלית H ב G עם $|H|= p^{n-1}$ איברים.

16. נניח חבורת-p G פועלת מעל קבוצה עם n אלמנטים ו p לא מחלק את n .

הוכח שקיימת נקודת שבת.

17. מצא מספר לוחות ריבועיות לא שקולות (עד כדי סיבובים) אם :

א. אפשר להשתמש ב 2 צבעים קבועים (לבן, ושחור) והלוח הוא 3×3 .
ב. אפשר להשתמש ב 2 צבעים קבועים (לבן, ושחור) והלוח הוא 4×4 .
ג. אפשר להשתמש ב 3 צבעים קבועים (לבן, ושחור, ירוק) והלוח הוא 5×5 .

18. א. מצא מספר משולשים שונים (עד כדי D_3) אשר מתקבלים ממשולש משוכלל נתון
אם מותר לצבוע קודקודים ב 3 צבעים קבועים.

ב. אותה שאלה עם הריבוע.

19. מצא את כל המערכות בינאריות עם 3 משתנים (פונקציות $Z_2^{\,3} \to Z_2$) עד כדי שקילות

(תמורות על המשתנים).

20. החבורה S_3 פועלת על $R[x_1,x_2,x_3]$ (פולינומים ממשיים עם 3 משתנים) לפי הפעולה על האינדקסים.
מצא את המייצבים של הפולינומים: $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2+x_3$, $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$,

21. נניח G חבורה עם 20, 30 ,45, 99, 130 או 175 אלמנטים. הוכח ש G לא פשוטה.
רמז: $Sylow's\ Theorems$:

(1) (קיום) תהי G חבורה מסדר n ו- p מס' ראשוני כך ש $p^k \mid n$.
אז קיימת ת"ח מסדר p^k .

(2) (צמידות) כל שתי ת"ח p-סילוב
(ז"א ת"ח H כך ש $|H|=p^n, |G|=p^n m, (p,m)=1$)
ב G צמודות. (לכן אם היא יחידה אז היא נורמלית ב G).

(3) (כמות)
מספר n_p חבורות p - סילוב ב G הוא מקיים:

א. $n_p=[G:N(P)]$ (כאשר P ת"ח p-סילוב).
ב. $n_p \equiv 1 \bmod p$.
ג. $n_p \mid m$.

22. הוכח שלכל חבורה מסדר 12 יש ת"ח נורמלית מסדר 3 או 4 .

23. נסמן $[a,b]:=aba^{-1}b^{-1}$ ("הקומוטטור") של $a,b\in G$ בחבורה G.
נגדיר ת"ח $G^{(1)}:=<\{[a,b]:\quad a,b\in G\}>\leq G$ ("הקומוטנט") הנוצרת ע"י קבוצת הקומוטטורים. הוכח:

א. $G^{(1)} \lhd G$.

ב. $G^{(1)}=G \Leftrightarrow G$ אבלית.

ב. $G/G^{(1)}$ אבלית.

ג. אם $f:G\to Y$ הומומורפיזם לתוך חבורה אבלית אז קיים הומומורפיזם $\varphi:G/G^{(1)}\to Y$ כך ש $f=\varphi\circ p$ כאשר $p:G\to G/G^{(1)}$ אפימורפיזם טבעי.

הגדרה: חבורה G נקראת **פתירה** אם $G^{(n)}=\{e\}$ עבור $n\in N$ מסוים כאשר $G^{(i+1)}:=(G^{(i)})^{(1)}$.

הגדרה שקולה: "קיימת שרשרת נורמשלית סופית" ז"א קיימת שרשרת:

$G=G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_n=[e]$ כך שלכל k חבורת מנה G_k/G_{k+1} אבלית.

24. הוכח שחבורות הבאות הן פתירות:

א. D_n .

ב. חבורת- p (ז"א חבורה עם $|G|=p^k$ איברים).

ג. $C:=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a\neq 0\right\} \leq GL_2(R)$.

ד. חבורת $Heisenberg$

$$H:=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad a,b,c\in R\right\}$$

ה. חבורת מטריצות ממשיות משולשות עליוניות עם אחדים על האלכסון.

25.

א. הוכח ש $S_n^{(1)} = A_n$.

הדרכה: שים לב $[(ij),(ik)]=(ijk)$.

ב. הסק כי לכל $n\geq 5$ חבורה S_n לא פתירה .

26. הוכח שבחבורה A_5 יש לפחות 2 עגילים עם סדר 5 שלא צמודים ב A_5 .

א. הוכח שכל חבורה בגודל $|G|=pq$ כאשר p,q ראשוני היא פתירה.

ב. * הוכח שכל חבורה בגודל $|G|=p^2q$ כאשר p,q ראשוני היא פתירה.

מידע: (Burnside) כל חבורה בגודל $|G|=p^iq^j$ כאשר p,q ראשוני היא פתירה.

(Feit-Thompson) $|G|=2n-1$ אז G פתירה.

לא להסתמך על המשפטים הנ"ל בפתרונות שלכם !

27. א. הוכח שכל חבורה עם 143 אלמנטים איזומורפית עם Ω_{143} היא ציקלית.

ב. נניח $|G|=pq$ עם $p<q$ ראשונים כך ש $q-1$ לא מתחלק ב p . הוכח ש G ציקלית.

ג. נניח $|G|=pq$ עם $p<q$ ראשונים ו- G אבלית. הוכח G ציקלית. (הדרכה: משפט הפיצול).

28. א. * נניח G חבורה לא ציקלית כך ש $|G|=2p$ אלמנטים ו p ראשוני. הוכח ש $G\cong D_p$.

ב. * (ההפוך למשפט $Lagrange$ לא נכון)

הוכח שבחבורה A_4 (עם 12 איברים) אין ת"ח עם 6 איברים.

הדרכה: השתמש בסעיף א וגם בעובדה שאיברים מסדר 2 ב A_4 הם מתחלפים.