תרגול 8

8 בדצמבר 2015

טענה 0.1 1) $lim_{x\to x_0}f\left(x\right)^{g(x)}=e^{lim_{x\to x_0}g(x)ln(f(x))}$

2) $lim_{x\to x_0}h\left(x\right)=\infty\Rightarrow lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)^{h(x)}=e^a$

תרגיל: חשבו את $lim_{x\to0}\left(\frac{ln\left(ex^4\right)}{ln\left(x^4\right)}\right)^{ln|x|}$

פתרון: כדי להבין באיזו טענה להשתמש נסדר קודם כל את הביטוי בעזרת חוקי לוגריתמים:

$$lim_{x\to0}\left(\frac{ln\left(e\right)+ln\left(x^4\right)}{ln\left(x^4\right)}\right)^{ln|x|}=lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{ln\left(x^4\right)}\right)^{ln|x|}=lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{4ln\left(x\right)}\right)^{\frac{4ln|x|}{4}}=lim_{x\to0}\left(\left(1\right.\right.$$

לאחר שסידרנו את הביטוי השתמשנו כאן בחוקי לוגריתמים.

תרגיל: חשבו את $lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

פתרון: ישר רואים שאפשר להשתמש כאן בטענה הראשונה:

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=e^{lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}=e^0=1$$

חישוב יותר מפורט:

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{\left(1-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}=0$$

$$lim_{x\to\infty}ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=ln\left(lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\right)=ln\left(1\right)=0$$

הערה: המעבר האחרון נובע מהטענה הבאה: אם f רציפה ב־$x=a$ ואם ידוע ש־$a=$ $lim_{x\to x_0}g\left(x\right)$ אזי $lim_{x\to x_0}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(lim_{x\to x_0}g\left(x\right)\right)=f\left(a\right)$

ולכן מכפלה של שתי פונקציות ששואפות לאפס נותנת אפס.

רציפות של פונקציה

הגדרה 0.2 (רציפות בנקודה)

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של נקודה x_0 (כלומר f מוגדרת גם בסביבה של x_0 וגם ב־x_0 עצמה), נאמר ש־f רציפה בנקודה x_0 אם מתמלאים שני התנאים הבאים:
1) קיים הגבול $lim_{x\to x_0}f\left(x\right)$
2) $lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$
דוגמאות:
1) $f\left(x\right)=\frac{|x-5|}{x-5}$ אינה רציפה ב־$x=5$ משום שאינה מוגדרת שם.
2) $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}} & x\neq2\\ \frac{1}{2} & x=2\end{cases}$ קודם כל משים לב שהפונקציה הזאת מוגדרת בנקודה $x=2$ אבל בשיעור הקודם ראינו שלא קיים גבול לפונקציה זאת כאשר $x=2$ מכיוון ש:
$lim_{x\to2^+}f\left(x\right)=0\neq1=lim_{x\to2^-}f\left(x\right)$

משפט 0.3 אם $f\left(x\right)$ היא פונקציה אלמנטרית אז $f\left(x\right)$ רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת.

הגדרה 0.4 תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בחצי סביבה ימנית $[x_0,r)$של הנקודה x_0. נאמר כי f רציפה מצד ימין הנקודה x_0 אם מתקיימים התנאים הבאים:
א) קיים הגבול הימני $lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)$
ב) $lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$
באופן דומה מגדירים את הגבול משמאל.

תרגיל: מצא $a,b\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2sin\left(x\right) & x\leq-\frac{\pi}{2}\\ asin\left(x\right)+b & -\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\\ cos\left(x\right) & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

פתרון: נשים לב שפונקציה שלנו רציפה בכל אחד מהתחומים: $x<-\frac{\pi}{2}$ וגם $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ וגם $x>\frac{\pi}{2}$ ולכן נשאר לנו למצוא a,b עבורם פונקציה תהיה רציפה ב־$x=\pm\frac{\pi}{2}$. בשביל זה אנחנו צריכים למצוא שתי משוואות השני נעלמים a,b:
עבור $x=-\frac{\pi}{2}$:

$$lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}\left(-2sin\left(x\right)\right)=2$$

$$lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\left(asin\left(x\right)+b\right)=-a+b$$

כדי שהגבול יהי קיים נרצה הגבולות חד צדיים יהיו שווים זה לזה כלומר נרצה שיתקיים: $-a+b=2$ וזו המשוואה הראשונה.
עבור $x=\frac{\pi}{2}$ נקבל:

$$lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f\left(x\right)=lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(asin\left(x\right)+b\right)=a+b$$

$$lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f\left(x\right)=lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(cos\left(x\right)\right)=0$$

ולכן המשוואה השנייה היא $a+b=0$. לאחר שנפתור את שתי המשוואות נקבל שעבור $a=1,b=-1$ הפונקציה שלנו תהיה רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$.
מיון נקודות אי רציפות

הגדרה 0.5 תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של הנקודה $x=x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נאמר כי x_0 היא נקודת אי רציפות סליקה אם:
1) קיים הגבול $lim_{x\to x_0}f\left(x\right)$
2) $lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$ או שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה x_0.

דוגמה: הראה כי לפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^3-8}{x-2}$ יש נקודת אי רציפות סליקה בנקודה $x=2$.
פתרון: $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה $x=2$ אך אינה מוגדרת ב $x=2$ עצמה כמו כן קיים הגבול:

$$lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}=lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$$

ולכן $x=2$ היא נקודת אי רציפות סליקה של f ברור כי זוהי נק' חידה שבה f אינה רציפה $\Leftarrow$ נוכל לתקן אותה ולשום:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & x\neq 2\\ 12 & x=2\end{cases}$$

הגדרה 0.6 נק' $x=x_0$ נקראת נק' אי רציפות ממין ראשון של הפונקציה $f\left(x\right)$ אם :
1) $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה מסויימת של $x=x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.
2) קיימים הגבולות החד צדדיים
3) $lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)\neq lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)$

דוגמה: $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$ קל לראות הגבולות החד צדיים קיים ולא שווים בנקודה $x=1$ ולכן זו נקודה אי רציפות ממין ראשון.

הגדרה 0.7 נק' x_0 נקראת נק' אי רציפות מסוג שני של f אם:
א) $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבת הנק' x_0 פרט אולי ל-x_0 עצמה.
ב) לפחות אחד מהגבולות החד צדיים אינו קיים.

לדוגמה: $x=0$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני של $f\left(x\right)=sin\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים אף אחד מהגבולות החד צדיים של f נקודה $x=0$.
תרגיל: מיינו את נק' אי רציפות של הפונקציות הבאות:
1)

$$f\left(x\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)}$$

פתרון: לפני שנמיין את נקודות אי רציפות קודם כל נמצא אותן: פונקציה שלנו אינה מוגדרת בנקודות: $x=0,-1,1$. נעשה מכנה משותף ונקבל $f\left(x\right)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}$
עבור $x=0$ נקבל: $lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=lim_{x\to 0}\frac{(x-1)}{(x+1)}=-1$ הגבול קיים ולכן $x=0$ היא נקודת אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$ נקבל: $lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=0$ גם כאן הגבול קיים ולכן זו נקודת אי רציפות סליקה.

עבור $x=-1$ נקבל הפונקציה שלנו אינה מוגדרת כי המכנה שלה מתאפס ולכן מספיק לנו לבדוק גבול חד צדדי אחד, נבדוק למשל את הגבול מימין: $lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x+1}=-\infty$

2) $f\left(x\right)=\frac{x}{sin\left(\sqrt{|x|}\right)}$

פתרון: נקודות אי רציפות כאן הן אותן נקודות שבהן מכנה נתאפס ולה הנקודות $x_k=\mp\left(\pi k\right)^2$ ולכן לכל $k\in\mathbb{Z}$ אלה הן נקודות אי רציפות. נחלק לשני מקרים:

מקרה 1: $k\neq 0$ נקבל $lim_{x\to x_k^+}f\left(x\right)=\pm\infty$ ולכן הגבול החד צדדי אינו קיים ולכן זו נקודת אי רציפות ממין שני.

מקרה 2: $k=0$ נקבל $lim_{x\to 0}\frac{x}{sin\sqrt{|x|}}=lim_{x\to 0}\frac{x}{sin\sqrt{|x|}}\frac{|x|}{|x|}=lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{sin\left(\sqrt{|x|}\right)}\cdot\frac{x}{|x|}\sqrt{|\ x\ |}=0$

3) $f\left(x\right)=sin\left(ln\left(x^2\right)\right)$

פתרון: נקודת אי רציפות של f היא $x=0$.

טענה 0.8 הגבול מימין של f אינו קיים ב־$x=0$

הוכחה: כדי להוכיח את הטענה נבחר שתי סדרות ששואפות לאפס מימין מימין עבורן נקבל שני גבולות שונים של f ולכן נסיק שלא קיים גבול ל־f.

נבחר $x_n=\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}-2\pi n}}$ וסדרה שנייה היא $y_n=\sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi n}}$ ברור ש־$x_n,y_n\to 0$ ושונות זו מזו.

$sin\left(ln\left(x_n\right)^2\right)=sin\left(ln\left(\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}-2\pi n}}\right)^2\right)=sin\left(ln\left(e^{\frac{\pi}{2}-2\pi n}\right)\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}-2\pi n\right)=1$ ואם נפעים את הפונקציה על כל אחד מאיברי הסדרה y_n אזי נקבל $sin\left(ln\left(y_n\right)^2\right)=-1$. הוכחנו שגבול מימין ב $x=0$ אינו קיים ולכן זוהי נקודת אי רציפות מסוג שני. ■