אינפי II תרגולים - תרגול VIII

אינטגרלים לא אמיתיים סוג I - מבחני התכנסות

תזכורת

* <u>מבחן ההשוואה הראשון</u>: בהינתן $\forall x\in[a,\infty):\ 0\le g(x)\le f(x)$ אזי מתקיים:

I. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס

II. $\int_a^\infty g(x)\,dx=\infty$ $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx=\infty$

* <u>מבחן ההשוואה הגבולי</u>: בהינתן $\forall x\in[a,\infty):\ 0\le g(x), f(x)$ וקיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

ונסמן $I_f:=\int_a^\infty f(x)\,dx,\ I_g:=\int_a^\infty g(x)\,dx$. אזי:

I. אם $0<L<\infty$: אזי I_f, I_g מתכנסים/מתבדרים יחד ("חברים")

II. אם $L=0$: אזי אם I_g מתכנס $\Leftarrow$ I_f מתכנס

III. אם $L=\infty$: אזי I_f מתכנס $\Leftarrow$ I_g מתכנס

=סוף תזכורת=

מבחן דיריכלה

תהיינה f,g פו' רציפות ב-$[a,\infty)$ כך שמתקיים:

(i) $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ מונו' יורדת וגזירה ברציפות

(ii) הפו' $G(x):=\int_a^x g(t)\,dt$ חסומה ב-$[a,\infty)$

אזי $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס

הערה

בשונה ממבחני ההשוואה הקודמים, מבחן דיריכלה עוסק גם בפו' "מתנדנדות", כלומר שמקבלות גם ערכים חיוביים וגם ערכים שליליים אינסוף פעמים.

תרגיל

הוכיחו כי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha>0$

נסמן $g(x)=\sin x$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. בקטע $[1,\infty)$ f גזירה ברציפות, ולכל $\alpha>0$ $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ והיא מונוטונית יורדת.

בנוסף:

$$G(x):=\int_1^x \sin t\,dt \underset{\text{ניוטון-לייבניץ}}{=} -\cos t\Big|_1^x = \cos 1-\cos x \le 2$$

ממבחן דיריכלה $\Downarrow$

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha>0$ $\square$

הערה

בניגוד לטורים מספריים, שם תנאי הכרחי להתכנסות הוא $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $f(x)$ לא חייבת לשאוף ל-0 כדי שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ יתכנס.

לדוגמא: $\int_1^\infty \sin(x^2)dx$

נציב $t=x^2 \Rightarrow dt=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$

$$1\longmapsto 1^2=1,\quad \text{"}\infty\text{"}\longmapsto \text{"}\infty^2\text{"}=\infty$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \sin(x^2)dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{2t^{\frac12}}dt = \frac12\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac12}}dt \longrightarrow$$ מתכנס משאלה קודמת.

התכנסות בהחלט / בתנאי

הגדרה

נאמר ש-$\int_a^\infty f\,dx$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty |f|\,dx$ מתכנס. נאמר שהוא מתכנס בתנאי רק אם האינטגרל הראשון מתכנס.

משפט (קושי)

אינטגרל המתכנס בהחלט מתכנס מתנאי.

תרגיל (מועד 2016)

קבע התכנסות בהחלט/בתנאי של האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

ראשית, נשים לב כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{מתכנס כי זהו אינטגרל מסוים על פי הגדרה עם רק אי רציפות אחת}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{דוגמה בהרצאה הקודמת שהוא מתכנס}}$

האינטגרל הנ"ל מתכנס בתנאי. האם מתכנס בהחלט?

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \int_0^1 \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx + \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

מתקיים כי $0 \le \underset{\cos 2x = 1-2\sin^2 x}{\frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x}} \underset{-1\le \sin \le 1}{\le} \frac{|\sin x|}{x}$

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון:

$$\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$$

מתבדר כיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx$ מתבדר, ולכן גם $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

תרגיל (מועד 2014) לא יש שם

נניח ש $f(x)$ אי-שלילית ורציפה מקומית ב $[1,\infty)$ כך שהאינטגרל $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

(I) האם בהכרח $\int_1^\infty f^2(x)\,dx$ מתכנס?

(II) האם בהכרח $\int_1^\infty f(x^2)\,dx$ מתכנס?

(I) לא בהכרח: ניקח $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. אזי, ראינו כי $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אבל $\int_1^\infty \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ מתבדר מהתרגיל הקודם

(II) נכון: נציב $t = x^2 \Leftarrow 2x\,dx = dt$, $1 \mapsto 1^2 = 1$, $\infty \mapsto \text{"}\infty^2\text{"} = \infty$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f(x^2)\,dx = \int_1^\infty \frac{f(t)}{2\sqrt{t}}\,dt$$

נשתמש בדריכלה: $\int_1^\infty f(t)\,dt$ מתכנס ולכן $F(t) := \int_1^t f(u)\,du$ חסומה, $\frac{1}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ מונוטונית יורדת

ולכן, לפי מבחן דריכלה האינטגרל מתכנס. $\square$

אינטגרל לא אמיתי מסוג II (אינטגרל של פו' עם נק' סינגולרית)

הגדרה

תהי a נק' סינגולרית של הפו' $f(x)$ אינטגרבילית בכל תת קטע $[c,d]\subseteq(a,b]$.

אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

במידה והגבול קיים (במובן הצר) נאמר כי האינטגרל מתכנס.

מאותו האופן ניתן להגדיר אינטגרל של פו' עם נק' סינגולרית באמצע הקטע:

נניח $c_1<c_2$ נק' סינגולריות של f בקטע $[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to c_1^-}\int_a^c f(x)\,dx+\lim_{c'\to c_1^+}\int_{c'}^{d} f(x)\,dx+\lim_{\tilde{c}\to c_2^-}\int_{\tilde{c}}^{b} f(x)\,dx+\lim_{\hat{c}\to c_2^+}\int_{\hat{c}}^{b} f(x)\,dx$$

כאשר $c_1<d<c_2$.

הערות חשובות

(I) תהי $f(x)$ פו' ונניח שלכל $\varepsilon>0$ $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,c-\varepsilon)$, $(c+\varepsilon,b]$.

נניח כי f אינה חסומה בסביבת הנק' c כך ש- $\lim_{x\to c^-}f(x)=\pm\infty$ או $\lim_{x\to c^+}f(x)=\pm\infty$

אם קיימים הגבולות

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx\ ,\quad I_2=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

אזי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ מתכנס וערכו הוא:

$$\int_a^b f(x)\,dx=I_1+I_2$$

(II) מספיק שאחד מהאינטגרלים I_1,I_2 יתבדר כדי שה-אינטגרל כולו יתבדר

(לכן, כדי להוכיח התבדרות מספיק לבדוק נק' אחת כזו.)

(III) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}<\infty \iff \alpha<1$

תרגיל (אם לא הוכחנו בכיתה אז III)

קבע עבור אילו ערכי α האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ מתכנס

לכל תת קטע $[t,1] \subseteq (0,1]$ הפונ' $\frac{1}{x^\alpha}$ רציפה ולכן נשתמש בניוטון לייבניץ:

$$\varphi(t) := \int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\Big|_t^1 & \alpha \neq 1 \\ \ln|x|\Big|_t^1 & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & \alpha \neq 1 \\ -\ln t & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha-1} + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & , \alpha > 1 \\ \lim_{t\to 0^+} -\ln t & , \alpha = 1 \\ -\frac{1}{\alpha-1} + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & , \alpha < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & , \alpha < 1 \\ \infty & , \alpha \geq 1 \end{cases}$$

ולכן האינטגרל מתכנס עבור $\alpha < 1$.

תרגיל

חשבו את $\int_0^1 \ln x \, dx$

הפונ' $\ln x$ אינה חסומה בסביבה ימנית של 0 ולכן זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג II.

נעזר באינט' בחלקים קודם:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}dx \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{אינט' בחלקים}} \\ u=\ln x & v=x \\ u'=\frac{1}{x} & v'=1 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon\right) = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \underset{\substack{\text{"}\frac{-\infty}{\infty}\text{"} \\ \text{לופי'}}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\varepsilon = 0$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1-0 = -1$$

מבחני התכנסות (ב) עבור לא אמיתי סוג II)

מבחן ההשוואה הראשון

תהיינה f,g אי״ש וללא חסומות רק בסביבה ימנית של a בקטע $(a,b]$ ומתקיים

$\forall x\in(a,b]:\ 0\le g(x)\le f(x)$ אזי

$\int_a^b f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ מתכנס.

מבחן ההשוואה הגבולי (השני)

נניח $0\le f,g$ ואינן חסומות רק בסביבה ימנית של a בקטע $(a,b]$ וקיים הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$. נסמן $I_g=\int_a^b g\,dx$, $I_f=\int_a^b f\,dx$. אזי:

(i) אם $0<L<\infty$: אזי I_g, I_f חברים

(ii) אם $L=0$: אזי I_g מתכנס $\Leftarrow$ I_f מתכנס

(iii) אם $L=\infty$: אזי I_f מתכנס $\Leftarrow$ I_g מתכנס

תרגילים

קבע התכנסות של האינטגרלים הבאים:

(I) $\int_0^1 \frac{dx}{1-\cos x}$

נעזר במבחן ההשוואה הגבולי יחד עם $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}\underset{\text{לופי׳}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sin x}=2\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=2\cdot1=2$$

וכיוון שהגבול קיים >0, מתקיים כי האינטגרלים אלו ו- $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ חברים.

כיוון ש- $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ מתבדר אזי גם שלנו.

(II) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

נשים ♡ כי יש לנו אינט' לא אמיתי "מעורב" שמכיל את שני הסוגים:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}}_{(*)\ \text{II סוג}} + \underbrace{\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}}_{(**)\ \text{I סוג}}$$

עבור (*) נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי יחד עם $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ והוא מתכנס (כידוע שעבור $\alpha<1$ מתכנס).

עבור (**) נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי יחד עם $g(x)=\frac{1}{x^2}$ והוא מתכנס (כידוע שעבור $\alpha>1$ מתכנס).

$\Downarrow$ האינט' שלנו מתכנס.

הערות

(I) ההגדרה של התכנסות בהחלט/בתנאי והמשפט קודם חלים על אינט' לא אמיתיים מסוג II

(II) ניתן לעבור מאינטגרל לא אמיתי מסוג II לאינטגרל לא אמיתי מסוג I ע"י ההצבה $y=\frac{1}{x-a}$ (כלומר $x=a+\frac{1}{y}$), כאשר a היא הנק' בה הפונ' שואפת ל-$\pm\infty$:

$$\int_a^b f\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2}\,dy$$

תרגיל

חשבו את $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ בשני דרכים

(I) באופן ישיר לפי ההגדרה של אינט' לא אמיתי מסוג II

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{2}$$

II) הפכו את האינטגרל הלא אמיתי מסוג I לסוג אחר:

נציב $x = 0 + \frac{1}{y}$

$\Downarrow$

$dx = \frac{-dy}{y^2}$

גבול עליון: $2 \longmapsto \frac{1}{2}$

גבול תחתון: $0 \longmapsto \infty$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_\infty^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y}}} \cdot \frac{-1}{y^2}\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{y^2}\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\,dy = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{b} \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\,dy =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -2y^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(-2b^{-\frac{1}{2}} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{2}$$