תרגול 1 - חזרה

זהויות טריגונומטריות

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin n\pi=0 \qquad \cos n\pi=(-1)^n, \quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\sin\alpha=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \tan\alpha=\cot\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$\tan\alpha=\tfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha=\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\tfrac{\alpha}{2}=\tfrac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\tfrac{\alpha}{2}=\tfrac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac12\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac12\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac12\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin^2\alpha=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha=\tfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\sin^3\alpha=\tfrac14(3\sin\alpha-\sin 3\alpha) \qquad \cos^3\alpha=\tfrac14(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$$
$$\sin^4\alpha=\tfrac18(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha) \qquad \cos^4\alpha=\tfrac18(3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$$

$$\tfrac12+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin(n+\frac12)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos(n+\frac12)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha \qquad e^{in\alpha}=\cos n\alpha+i\sin n\alpha, \quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\cos\alpha=\tfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \qquad \cos n\alpha=\tfrac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2}$$
$$\sin\alpha=\tfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \qquad \sin n\alpha=\tfrac{e^{in\alpha}-e^{-in\alpha}}{2i}$$

Leonhard Euler
1707-1783

Abraham De-Moivre
1667-1754

1. השתמש בנוסחת $Euler$ - $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ובזהות $e^{i(x+y)}=e^{ix}\cdot e^{iy}$ (*) כדי לקבל את הזהויות הטריגונומטריות הבאות:

(a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(b) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(c) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(d) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(e) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

(f) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

(g) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

(h) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

(i) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

(j) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

(k) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

<u>פתרון:</u> מנוסחת $Euler$ ושימוש בזהות $e^{i(x+y)}=e^{ix}\cdot e^{iy}$, שקל לזכור אותה, נקבל:

$$\begin{aligned}
e^{i(\alpha\pm\beta)} &= e^{i\alpha}e^{\pm i\beta}\\
\cos(\alpha\pm\beta)+i\sin(\alpha\pm\beta) &= \Big(\cos\alpha+i\sin\alpha\Big)\cdot\Big(\cos\beta\pm i\sin\beta\Big)\\
\cos(\alpha\pm\beta)+i\sin(\alpha\pm\beta) &= \Big(\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\Big)+i\Big(\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\Big)
\end{aligned}$$

ומהשוואת חלק ממשי ומדומה נקבל את $a,\ b,\ c,\ d$.
הערה: למעשה הלכנו כאן "בכיוון הפוך". בדרך כלל מוכיחים את הנוסחה (*) בעזרת נוסחאות a ו-c.

נבצע את שינוי המשתנים הבא : $\begin{cases}\alpha=x+y\\ \beta=x-y\end{cases}$ כלומר $\begin{cases}x=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$ ולכן :

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= \sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=\\
&= 2\sin x\cos y=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin\alpha-\sin\beta &= \sin(x+y)-\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y-\sin x\cos y+\cos x\sin y=\\
&= 2\cos x\sin y=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha+\cos\beta &= \cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y=\\
&= 2\cos x\cos y=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha-\cos\beta &= \cos(x+y)-\cos(x-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y-\cos x\cos y-\sin x\sin y=\\
&= -2\sin x\sin y=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

וקיבלנו את $e,\ f,\ g,\ h$ ואת הזהויות $i,\ j,\ k$ המתקבלות בשלב ביניים מתאים.

2. חשב את האינטגרלים הבאים עבור $n,m\in\mathbb{N}$:

(א) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \sin mx\ dx=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ \pi & ;\ n=m\end{cases}$$

(ב) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ \cos mx\ dx=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ \pi & ;\ n=m\end{cases}$$

(ג) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \cos mx\ dx=0$$

<u>פתרון:</u>

(א) נניח $n\neq m$ אזי:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \sin mx\ dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x\Big]dx=\\ &= -\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}-\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big]_{-\pi}^{\pi}=0\end{aligned}$$

ונניח $n=m$ אזי:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \sin mx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\ dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[1-\cos 2nx\Big]dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{\sin 2nx}{2n}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

(ב) נניח $n\neq m$ אזי:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ \cos mx\ dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\Big]dx=\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big]_{-\pi}^{\pi}=0\end{aligned}$$

ונניח $n=m$ אזי:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ \cos mx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\ dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[1+\cos 2nx\Big]dx=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{\sin 2nx}{2n}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

(ג) ניתן לחשב ישירות <u>אבל כדאי ורצוי לשים לב</u> כי במקרה זה האינטגרנד אי־זוגי והקטע סימטרי ולכן :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \cos mx\ dx=0$$

3. חשב את האינטגרלים הבאים עבור $n,m\in\mathbb{N}$:

(א) $$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ l & ;\ n=m\end{cases}$$

(ב) $$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ l & ;\ n=m\end{cases}$$

(ג) $$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=0$$

פתרון: ניתן לפתור ישירות ע"י זהויות טריגונומטריות כמו בתרגיל 2 .
או, לחילופין, ניתן לבצע החלפת משתנים : $z=\frac{\pi x}{l}$ ואז "$dx=\frac{l}{\pi}dz$" ו־ $[-l,l]\longrightarrow[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nz\,\sin mz\,\frac{l}{\pi}dz=\frac{l}{\pi}\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ \pi & ;\ n=m\end{cases}=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ l & ;\ n=m\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nz\,\cos mz\,\frac{l}{\pi}dz=\frac{l}{\pi}\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ \pi & ;\ n=m\end{cases}=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ l & ;\ n=m\end{cases}$$

שוב נשים לב כי במקרה זה האינטגרנד אי־זוגי ולכן : $\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=0$

4. חשב את האינטגרלים הבאים עבור $n,m\in\mathbb{N}$:

(א) $$\int_{a}^{b}\sin\frac{2n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,\sin\frac{2m\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,dx=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ \dfrac{b-a}{2} & ;\ n=m\end{cases}$$

(ב) $$\int_{a}^{b}\cos\frac{2n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,\cos\frac{2m\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,dx=\begin{cases}0 & ;\ n\neq m\\ \dfrac{b-a}{2} & ;\ n=m\end{cases}$$

(ג) $$\int_{a}^{b}\sin\frac{2n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,\cos\frac{2m\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,dx=0$$

פתרון: שוב נבצע החלפת משתנים : $z=\frac{2\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}$ ואז "$dx=\frac{b-a}{2\pi}dz$"
ו־ $[-\pi,\pi]\longrightarrow[a,b]$, ונקבל:

$$\int_a^b \sin\frac{2n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\ \sin\frac{2m\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nz\ \sin mz\ \frac{b-a}{2\pi}dz =$$

$$= \frac{b-a}{2\pi}\begin{cases} 0 & ;\ n\neq m \\ \pi & ;\ n=m\end{cases} = \begin{cases} 0 & ;\ n\neq m \\ \dfrac{b-a}{2} & ;\ n=m\end{cases}$$

$$\int_a^b \cos\frac{2n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\ \cos\frac{2m\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nz\ \cos mz\ \frac{b-a}{2\pi}dz = \begin{cases} 0 & ;\ n\neq m \\ \dfrac{b-a}{2} & ;\ n=m\end{cases}$$

$$\int_a^b \sin\frac{2n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\ \cos\frac{2m\pi(x-\frac{a+b}{2})}{b-a}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nz\ \cos mz\ \frac{b-a}{2\pi}dz = 0$$

5. חשב את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_0^{\pi} x\ \sin nx\ dx$

(ב) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad , \quad f(x)=\begin{cases} 0 & ;\ x\in[-\pi,0] \\ x & ;\ x\in[0,\pi]\end{cases}$

(ג) $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\ dx$

(ד) $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\ dx$

(ה) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\ \cos^2 x\ dx$

(ו) $-\pi<p<\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-\pi,p]}(x)e^{-inx}dx \quad , \quad \chi_{[-\pi,p]}(x)=\begin{cases} 1 & ;\ x\in[-\pi,p] \\ 0 & ;\ x\in(p,\pi]\end{cases}$

<u>פתרון:</u>

(א) נפתור ע"י אינטגרציה בחלקים :

$$\int_0^{\pi} x\sin nx\ dx = \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

(ב) נפריד לתחומים:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \int_0^{\pi} x\sin nx\ dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

(ג) האינטגרציה על פונקציה אי־זוגית בקטע סימטרי ולכן: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\, dx = 0$

(ד) האינטגרנד זוגי בקטע סימטרי ולכן נקבל :

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\, dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nx\, dx = 2\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi} - 2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\, dx = \Big[\frac{2\cos nx}{n^2}\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\big((-1)^n-1\big)}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2} & ;\ n=2k-1 \\ 0 & ;\ n=2k \end{cases}$$

(ה) ניתן לפתור ישירות ע"י איטגרציה בחלקים או ע"י זהויות טריגונומטריות, אבל הכי פשוט לשים לב שהאיטגרנד הוא פונקציה אי־זוגית בקטע סימטרי ולכן:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \cos^2 x\, dx = 0$$

(ו) הפונקציה $\chi_{[a,b]}$ היא הפונקציה המציינת על הקטע $[a,b]$ כלומר $\chi_{[a,b]}(x)=1$ לכל x ב־ $[a,b]$ ו־ $\chi_{[a,b]}(x)=0$ לכל x אחר.

כמו כן חישוב אינטגרציה עבור פונקציה מרוכבת $\varphi(x)=u(x)+iv(x)$ כאשר $\begin{cases} u(x) = \mathrm{Re}\,\varphi(x) \\ v(x) = \mathrm{Im}\,\varphi(x) \end{cases}$ מוגדר ע"י :

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\big(u(x)+iv(x)\big)dx := \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x)dx + i\int\limits_{x_1}^{x_2} v(x)dx$$

ובתרגיל הנתון :

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\chi_{[-\pi,p]}e^{-inx}dx = \int\limits_{-\pi}^{p}(\cos nx - i\sin nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{p}\cos nx\, dx - i\int\limits_{-\pi}^{p}\sin nx\, dx =$$

$$= \Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_{-\pi}^{p} - i\Big[-\frac{\cos nx}{n}\Big]_{-\pi}^{p} = \frac{\sin np}{n} + i\frac{\cos np}{n} - i\frac{(-1)^n}{n} =$$

$$= i\frac{e^{-inp}}{n} - i\frac{(-1)^n}{n}$$

6. חשב את הסכומים הבאים עבור $x \in \mathbb{R}$:

(א) $\sum_{n=1}^{N} \sin nx$

(ב) $\sum_{n=1}^{N} n\cos nx$

<u>פתרון:</u>

(א) עבור $x = 2\pi k$:

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \sum_{n=1}^{N} 0 = 0$$

עבור $x \neq 2\pi k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sin nx &= \operatorname{Im}\left\{\sum_{n=1}^{N} e^{inx}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\sum_{n=1}^{N} (e^{ix})^n\right\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{ix}(e^{iNx}-1)}{e^{ix}-1}\right\} = \\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{\frac{i(N+1)x}{2}}\left(e^{\frac{iNx}{2}} - e^{-\frac{iNx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right\} = \operatorname{Im}\left\{e^{\frac{i(N+1)x}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right\} = \\
&= \operatorname{Im}\left\{e^{\frac{i(N+1)x}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right\} = \frac{\sin\frac{(N+1)x}{2} \cdot \sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

(ב) עבור $x = 2\pi k$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\cos nx = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

עבור $x \neq 2\pi k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n\cos nx &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right) = \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + (N+\frac{1}{2})\sin(N+\frac{1}{2})x\right)\sin\frac{x}{2} - \left(\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x\right)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2} + (N+\frac{1}{2})\sin(N+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos(N+\frac{1}{2})x\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + N\sin(N+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin(N+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos(N+\frac{1}{2})x\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{N}{2}\left(\cos Nx - \cos(N+1)x\right) + \frac{1}{2}\cos Nx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{-1 + (N+1)\cos Nx - N\cos(N+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

תרגול 2 - מרחבי מכפלה פנימית

הגדרות

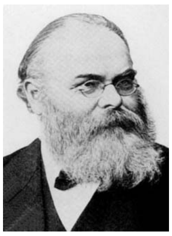
- V מרחב ליניארי, $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ מכפלה פנימית אם:
  - **i.** $\langle u,u\rangle \geq 0$ לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$.
  - **ii.** $\langle \alpha u+\beta v,w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$ לכל $u,v,w\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.
  - **iii.** $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$ לכל $u,v\in V$.
- מרחב ליניארי V עם מכפלה פנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית.
- $u,v\in V$ במרחב מכפלה פנימית, נקראים ניצבים אם $\langle u,v\rangle = 0$, ונסמן $u\perp v$.
- מכפלה פנימית סטנדרטית ב- $\mathbb{C}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$.
- V מרחב ליניארי, $||\cdot|| : V\to\mathbb{R}$ נורמה אם:
  - **i.** $||u||\geq 0$ לכל $u\in V$, $||u||=0\Leftrightarrow u=0$.
  - **ii.** $||\alpha u|| = |\alpha|\cdot||u||$ לכל $u\in V$, $\alpha\in\mathbb{C}$.
  - **iii.** $||u+v||\leq ||u||+||v||$ לכל $u,v\in V$.
- מרחב ליניארי V עם נורמה נקרא מרחב נורמי.
- נורמה מושרית במרחב מכפלה פנימית V: $||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

משפטים

V מרחב מכפלה פנימית. לכל $u,v\in V$:

- אי-שיויון קושי-שוורץ (בוניאקובסקי) - $|\langle u,v\rangle| \leq ||u||\cdot||v||$.
- אי-שיויון המשולש - $||u+v||\leq ||u||+||v||$.
- שיויון המקבילית - $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2+||v||^2)$.
- משפט פיתגורס - אם $u\perp v$ $||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2$.

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky
1804-1889



Hermann Amandus Schwarz
1843-1921

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

1. מצא את הבסיס והמימד של $V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \;\middle|\; p(x) = p(-x) \right\}$.

פתרון: V הוא אוסף הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ בעלי דרגה n לכל היותר, ועם תכונת הזוגיות.
בסיס ל-$\mathbb{R}_n[x]$ הוא $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$. נסמן ב- V_{even} את אוסף כל הפולינומים מדרגה לכל היותר n אשר מכילים רק חזקות זוגיות. ברור ש- $V_{even} \subseteq V$, ומצד שני אם $p \in V$ אזי $p(x) = \frac{1}{2}\big(p(x) + p(-x)\big)$ וכן $\frac{1}{2}\big(p(x) + p(-x)\big) \in V_{even}$. לכן בסיס עבור V נתון ע"י :

עבור n זוגי $V = span\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, x^n\}$ $\quad dimV = \frac{n}{2} + 1$
עבור n אי-זוגי $V = span\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{n-3}, x^{n-1}\}$ $\quad dimV = \frac{n-1}{2} + 1$

2. יהי V מרחב (מעל $\mathbb{R}$) הפונקציות הממשיות והרציפות המוגדרות בקטע $[0,1]$, כלומר $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

נגדיר: $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$

האם זו מכפלה פנימית ?

פתרון: נבדוק את הדרישות ממכפלה פנימית:

(א) אי-שליליות

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle \quad &= \quad (f(0))^2 + \int\limits_0^1 (f(x))^2 dx \geq 0 \\
\langle f, f \rangle = 0 \quad &\iff \quad (f(0))^2 + \int\limits_0^1 (f(x))^2 dx = 0 \\
&\iff \quad (f(0))^2 = 0 \quad \wedge \quad \int\limits_0^1 (f(x))^2 dx = 0 \\
&\iff \quad f(x) \equiv 0
\end{aligned}$$

אם בוחרים את המרחב V כנ"ל פרט שהפונקציות רק רציפות למקוטעין, אז יתכן ש- $\langle f, f \rangle = 0$ מבלי ש- $f = 0$ זהותית, ובמקרה זה אין לנו מכפלה פנימית. אפשר לקבל מכפלה פנימית במקרה זה אם נתייחס ל- V כאוסף של מחלקות שקילות של פונקציות, כלומר שתי פונקציות f ו- g נקראות שקולות אם $f(x) = g(x)$ לכל x ב- $[0,1]$ פרט אולי למספר "סופי" של נקודות.

(ב) ליניאריות "המשתנה" הראשון

$$\begin{aligned}
\langle af + bg, h \rangle &= [af(0) + bg(0)]h(0) + \int\limits_0^1 (af(x) + bg(x))h(x)dx \\
&= a\Big[f(0)h(0) + \int\limits_0^1 f(x)h(x)dx\Big] + b\Big[g(0)h(0) + \int\limits_0^1 g(x)h(x)dx\Big] \\
&= a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle
\end{aligned}$$

(ג) סימטריות עם הצמדה - לפי הגדרת המכפלה ניתן לראות מיד ש- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ ומכיוון שמדובר במרחב ממשי, כלומר $\overline{\langle g, f \rangle} = \langle g, f \rangle$, נקבל $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.

ולכן בסה"כ זוהי מכפלה פנימית .

3. יהי $V = C[a,b]$, מרחב הפונקציות הממשיות והרציפות על $[a,b]$, ונגדיר לכל $f \in V$

$$||f||_\infty = \max\Big\{|f(x)| \;\; ; \;\; a \le x \le b\Big\}$$

הוכח שזו נורמה עפ"י ההגדרה.

<u>פתרון:</u> נבדוק את דרישות הנורמה:

(א) אי־שליליות

$$\begin{aligned} ||f||_\infty &\ge 0 && \text{מההגדרה} \\ ||f||_\infty = 0 &\iff \max_{a\le x\le b}|f(x)| = 0 \\ &\iff f(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

(ב) כפל בסקלר

$$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \max_{a\le x\le b}|\lambda f(x)| \\ &= \max_{a\le x\le b}|\lambda|\cdot|f(x)| \\ &= |\lambda|\cdot||f||_\infty \end{aligned}$$

(ג) אי־שויון המשולש

$$\begin{aligned} ||f+g||_\infty &= \max_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)| \\ &\le \max_{a\le x\le b}\Big\{|f(x)|+|g(x)|\Big\} \\ &\le \max_{a\le x\le b}|f(x)| + \max_{a\le x\le b}|g(x)| \\ &= ||f||_\infty + ||g||_\infty \end{aligned}$$

ולכן בסה"כ זוהי נורמה .

4. יהי $V = l_2$ אוסף הסדרות המרוכבות (מעל $\mathbb{C}$) והאינסופיות $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש־ $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$.

(א) הוכח ש־ l_2 הוא מרחב וקטורי.

(ב) לכל $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l_2$ נגדיר את הפעולה הבאה: $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n}$.
הוכח שהפעולה מוגדרת היטב ומהווה מכפלה פנימית ב־ l_2.

(ג) לכל $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_2$ נגדיר את הנורמה המושרית $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}$. הוכח:

$$\sum_{n=1}^\infty\Big(|x_n|^2+|y_n|^2\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty\Big(|x_n+y_n|^2+|x_n-y_n|^2\Big)$$

<u>פתרון:</u>

(א) מהנתון $0 = (0,0,\ldots) \in l_2$ וכן $e_i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1\text{terms}},1,0\ldots) \in l_2$ לכל $i \in \mathbb{N}$. כמו כן $(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\ldots) \notin l_2$ אבל $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots) \in l_2$ (למה?). למעשה l_2 הוא תת־קבוצה של אוסף הסדרות המרוכבות האינסופיות, ולכן נבדוק סגירות לגבי צירוף ליניארי (או סגירות לחיבור ולכפל בסקלר).

יהיו $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$ כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2<\infty$. ומתקיים $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots)=\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$, וכן

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|x_n+y_n|^2 &= \sum_{n=1}^{N}(x_n+y_n)\overline{(x_n+y_n)}=\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2+x_n\overline{y_n}+y_n\overline{x_n}+|y_n|^2=\\ &= \sum_{n=1}^{N}|x_n|^2+2\mathrm{Re}\,(x_n\overline{y_n})+|y_n|^2\le\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2+2|x_n\overline{y_n}|+|y_n|^2\end{aligned}$$

מכיוון שמתקיים:

$$\left|\sum_{n=1}^{N}x_n\overline{y_n}\right|^2\le\left(\sum_{n=1}^{N}|x_n\overline{y_n}|\right)^2=\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N}|x_n|\cdot|\overline{y_n}|\right)^2\le\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2\cdot\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2}_{\mathbb{C}^n\text{ אי שויון קושי-שוורץ ב- }}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|x_n+y_n|^2 &\le \sum_{n=1}^{N}|x_n|^2+2|x_n\overline{y_n}|+|y_n|^2\le\\ &\le \sum_{n=1}^{N}|x_n|^2+2\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2}+\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2+2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2<\infty\end{aligned}$$

כלומר $x+y\in l_2$. בנוסף לכל $\alpha\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2\ldots)=\{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha x_n|^2=|\alpha|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$$

ולכן $\alpha x\in l_2$. כלומר l_2 לא ריק וסגור לצירוף ליניארי ולכן l_2 מרחב ליניארי (כתת-מרחב).

(ב) הפעולה מוגדרת היטב כיוון שהטור מתכנס (ואפילו בהחלט), כפי שהראנו לעיל:

לכל $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$ כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2<\infty$ מתקיים,

$$\left|\sum_{n=1}^{N}x_n\overline{y_n}\right|^2\le\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N}|x_n|\cdot|\overline{y_n}|\right)^2\le\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2\cdot\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2}_{\mathbb{C}^n\text{ אי שויון קושי-שוורץ ב- }}\le\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2<\infty$$

נבדוק את הדרישות ממכפלה פנימית:

i. אי-שליליות

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\ge 0\\ \langle x,x\rangle=0 &\iff \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=0\\ &\iff x_n=0\ \ n=1,2,\ldots\\ &\iff x\equiv 0\end{aligned}$$

ii. ליניאריות "המשתנה" הראשון

$$\begin{aligned}\langle ax+by,z\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}(ax_n+by_n)\overline{z_n}=\sum_{n=1}^{\infty}ax_n\overline{z_n}+by_n\overline{z_n}= \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{z_n}+b\sum_{n=1}^{\infty}y_n\overline{z_n}=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle\end{aligned}$$

iii. סימטריות עם הצמדה ־ לפי הגדרת המכפלה:

$$\overline{\langle x,y\rangle}=\overline{\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{x_n\overline{y_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}y_n\overline{x_n}=\langle y,x\rangle$$

כלומר $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

לכן בסה"כ הפעולה מהווה מכפלה פנימית ו־ l_2 הוא מרחב מכפלה פנימית.

(ג) זהו בדיוק שיוון המקבילית (למה?) במרחבי מכפלה פנימית:
V מרחב מכפלה פנימית אזי $||u+v||^2+||u-v||^2=2||u||^2+2||v||^2 \quad \forall u,v\in V$.
ולכן נוכיח באופן כללי:

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= \langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle=\overline{\langle u+v,u\rangle}+\overline{\langle u+v,u\rangle}= \\ &= \overline{\langle u,u\rangle}+\overline{\langle v,u\rangle}+\overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle v,v\rangle}=||u||^2+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+||v||^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||u-v||^2 &= \langle u-v,u-v\rangle=\langle u,u-v\rangle-\langle v,u-v\rangle=\overline{\langle u-v,u\rangle}-\overline{\langle u-v,v\rangle}= \\ &= \overline{\langle u,u\rangle}-\overline{\langle v,u\rangle}-\overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle v,v\rangle}=||u||^2-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle+||v||^2\end{aligned}$$

ואם נחבר את שני האגפים נקבל: $||u+v||^2+||u-v||^2=2||u||^2+2||v||^2$.
ובמקרה שלנו:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|x_i+y_i|^2+|x_i-y_i|^2\Big)=2\sum_{n=1}^{\infty}|x_i|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|y_i|^2$$

או בכתיב הנורמה (המושרית):

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2\left(||x||^2+||y||^2\right)$$

תרגול 3 ־ מערכות אורתונורמליות

הגדרות

V מרחב מכפלה פנימית ו־ $\{v_k\} \in V$ היא מערכת סופית $\{v_k\}_{k=1}^n$ או אינסופית $\{v_k\}_{k=1}^\infty$.

- $\{u_k\} \in V$ מערכת אורתוגונלית אם $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$ ו־ $\langle u_i, u_i \rangle \neq 0$ לכל i.
- $\{e_k\} \in V$ מערכת אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית ובנוסף $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ לכל i.
- גרם־שמידט ־ בהנתן $v_1, v_2 \ldots, v_k \in V$ בת"ל, נחשב:

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$
$$e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{||v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1||}$$
$$\vdots$$
$$e_k = \frac{v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle e_j}{||v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle e_j||}$$

וכך ש: $\{e_1, e_2, \ldots e_k\}$ אורתונורמלית ו־ $span\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = span\{e_1, e_2, \ldots e_k\}$.

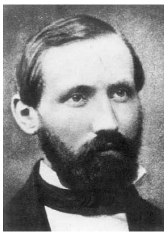
- $\{u_k\} \in V$ אורתוגונלית, $u \in V$. $a_k = \dfrac{\langle u, u_k \rangle}{||u_k||^2}$ לכל k מקדמי פורייה מוכללים של u.
- $\{e_k\} \in V$ אורתונורמלית, $u \in V$. $a_k = \langle u, e_k \rangle$ לכל k מקדמי פורייה מוכללים של u.
- $W \subseteq V$ תת מרחב, $\tilde{u}$ נקרא היטל אורתוגונלי של $u \in V$ ב־ W אם $\langle u - \tilde{u}, w \rangle = 0$ לכל $w \in W$.
- $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k$ מתכנס בנורמה ל־ v אם $\lim_{n\to\infty} ||v - \sum_{k=1}^n a_k e_k|| = 0$,
ובמקרה זה נרשום $v = \sum_{k=1}^\infty a_k e_k$.
- $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ V אם $\lim_{m\to\infty} ||u - \sum_{n=1}^m \langle u, e_n \rangle e_n|| = 0$ לכל $u \in V$.
- $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ מערכת אורתונורמלית שלמה ב־ V אם $\forall n \;\; \langle u, e_n \rangle = 0 \;\; \Rightarrow \;\; u = 0$.

משפטים

V מרחב מכפלה פנימית,
$\{u_k\}_{k=1}^n \in V$ מערכת אורתוגונלית, $\{e_k\}_{k=1}^n \in V$ מערכת אורתונורמלית, ו- $\{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}$.

- <u>פתגורס המוכלל</u> - $||\sum_{k=1}^n a_k u_k||^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \cdot ||u_k||^2$.
- <u>פרסבל (סופי)</u> - $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ אזי: $||u||^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$.
- <u>פרסבל מוכלל (סופי)</u> - $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k$, $v = \sum_{k=1}^n b_k e_k$ אזי: $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \overline{b_k}$.
- $W \subseteq V$ תת מרחב, $u \in V$ ויהי $\tilde{u}$ ההיטל האורתוגונלי של u ב- W,
אזי $\tilde{u}$ הוא גם <u>הקירוב הטוב ביותר של u ב- W</u>, כלומר $||u-\tilde{u}|| \le ||u-w||$ לכל $w \in W$.
- $W = span\{e_k\}_{k=1}^n \subseteq V$, $u \in V$ אזי $\tilde{u}$ ההיטל האורתוגונלי של u ב- W (שהוא גם הקירוב הטוב ביותר של u ב- W) הוא: $\tilde{u} = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k\rangle e_k$.
- <u>אי־שיויון בסל</u> - $||\tilde{u}|| \le ||u||$ לכל $u \in V$, או $\sum_{k=1}^n |\langle u, e_k\rangle|^2 \le ||u||^2$.
- <u>למה של רימן־לבג</u> - $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ אורתונורמלית ב- V. לכל $v \in V$ $\lim_{n\to\infty}\langle v, e_n\rangle = 0$.
- מערכת אורתונורמלית $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ סגורה ב- V אמ"מ $||u||^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle u, e_n\rangle|^2$ לכל $u \in V$.
- אם $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ סגורה ב- V אזי היא שלמה ב- V. (ההיפך לא בהכרח נכון).
- <u>פרסבל</u> - $u \in V$ ו- $a_n = \langle u, e_n\rangle$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $||u||^2 = \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2$.
- <u>פרסבל מוכלל</u> - $u, v \in V$ ו- $a_n = \langle u, e_n\rangle,\ b_n = \langle v, e_n\rangle$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n \overline{b_n}$.


Henri Leon Lebesgue
1875-1941


Georg Friedrich Bernhard Riemann
1826-1866


Friedrich Wilhelm Bessel
1784-1846

1. תהי $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{n}$ מערכת אורתונורמלית בממ"פ W , ונניח $f \in span\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{n}$ ומקיימת:

(i) $\langle f, \varphi_i \rangle = 0 \quad i = 4, 5, \ldots, n$

(ii) $\langle f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle f, \varphi_2 + \varphi_3 \rangle = 0$

(iii) $\langle f, f \rangle = 1$

בטא את f בעזרת $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{n}$ (יש יותר מאפשרות אחת. מצאו את כולן).

<u>פתרון:</u> $f \in span\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{n}$ ולכן $f = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle f, \varphi_i \rangle}_{a_i} \varphi_i$:

מתנאי (i) $\quad \forall i = 4, 5, 6, \ldots, n \ \ a_i = 0$

מתנאי (ii) $\quad a_1 + a_2 = 0$, $\quad a_2 + a_3 = 0$

מתנאי (iii) $\quad |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = 1$

כלומר:

$$a_2 = -a_1$$
$$a_3 = -a_2 = a_1$$
$$1 = |a_1|^2 + |-a_1|^2 + |a_1|^2 = 3|a_1|^2$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\theta} \quad a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\theta} \quad a_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad f = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\theta}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)$$

כאשר θ מספר ממשי כלשהו בתחום $[0, 2\pi)$.

2. יהי המרחב $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$, ויהיה W תת מרחב של $C[-1,1]$ הנתון ע"י $W = span\{1, x, x^2\}$.
מצא את הקירוב הטוב ביותר ב־ W לפונקציה f הנתונה ע"י $f(x) = |x|$ ביחס לנורמה המושרית ע"י המ"פ הנתונה.
<u>פתרון:</u> נבצע תהליך גרם־שמידט עבור $\{1, x, x^2\}$ כדי לקבל מערכת אורתוגונלית:

$$\varphi_1(x) = 1$$
$$\varphi_2(x) = x - \underbrace{\tfrac{\langle x,1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle}}_{=0} \cdot 1 = x$$
$$\varphi_3(x) = x^2 - \tfrac{\langle x^2,1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} \cdot 1 - \underbrace{\tfrac{\langle x^2,x \rangle}{\langle x,x \rangle}}_{=0} \cdot x = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx} = x^2 - \tfrac{1}{3}$$

הקירוב הטוב ביותר נתון ע"י :

$$\widetilde{|x|} = \frac{\langle |x|,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 + \underbrace{\frac{\langle |x|\,,x\rangle}{\langle x,x\rangle}}_{=0}\cdot x + \frac{\left\langle |x|,x^2-\frac{1}{3}\right\rangle}{\left\langle x^2-\frac{1}{3},x^2-\frac{1}{3}\right\rangle}\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot\int_0^1 x\cdot 1dx}{2\cdot\int_0^1 1\cdot 1dx}\cdot 1 + \frac{2\cdot\int_0^1 x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}{2\cdot\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx}\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 1 + \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}}\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{45}}\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{45}{48}\cdot x^2 + \frac{1}{2} - \frac{45}{48}\cdot\frac{1}{3} = \frac{15}{16}\cdot x^2 + \frac{3}{16}$$

3. תהא $f(x)\in E[-\pi,\pi]$ רציפה למקוטעין, ולכל $a,b,c\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$G(a,b,c) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)+a+b\cos x+c\sin x|^2dx$$

עבור אילו ערכים a,b,c מקבלת $G(a,b,c)$ את הערך המינימלי שלה ?

<u>פתרון:</u> נסתכל על פעולת האינטגרציה כעל מכפלה פנימית במרחב שלנו, ולכן:

$$\begin{aligned} G(a,b,c) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)+a+b\cos x+c\sin x|^2dx = \\ &= ||f(x)+a+b\cos x+c\sin x||^2 = ||f(x)-(-a-b\cos x-c\sin x)||^2 \end{aligned}$$

מדובר במרחק שבין $f(x)$ לבין $(-a-b\cos x-c\sin x)$, ולכן לפי משפט הקירוב הטוב ביותר המרחק המינימלי מתקבל עבור ההיטל של $f(x)$ על $span\{1,\cos x,\sin x\}$, וההיטל (שהוא הקירוב הטוב ביותר של $f(x)$) הוא יחיד ומחושב ע"י (כי המערכת $\{1,\cos x,\sin x\}$ אורתוגונלית):

$$-a = \frac{\left\langle f(x),1\right\rangle}{||1||^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot 1\;dx$$

$$-b = \frac{\left\langle f(x),\cos x\right\rangle}{||\cos x||^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\;dx$$

$$-c = \frac{\left\langle f(x),\sin x\right\rangle}{||\sin x||^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\;dx$$

4. יהי $V=\left\{f:[-1,1]\to\mathbb{R}\quad;\quad f\in C[-1,1]\right\}$. נגדיר לכל $f,g\in C[-1,1]$ את המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

(א) הראו כי הסידרה $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית כאשר $\varphi_n(x)=\sin n\pi x$.

(ב) מצאו נוסחה בשביל מקדמי פורייה המוכללים של פונקציה $f\in V$ עבור המערכת האורתונורמלית הנ"ל, וחשבו את כל המקדמים הללו כאשר $f(x)=x^2+7\sin 4\pi x$.

(ג) בהרבה מקרים - אבל לא תמיד נקבל ש- $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ $(*)$.
מצאו f ב- V כך ש-$(*)$ מתקיים, ו-f אחרת כך ש-$(*)$ לא מתקיים.
(ד) הוכיחו ש:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^5 \sin n\pi x \, dx = 0$$

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב מכפלה פנימית של שני איברים ,
עבור $m = n$:

$$\langle \sin m\pi x, \sin n\pi x\rangle = \int_{-1}^{1}\sin^2 m\pi x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(1-\cos 2m\pi x\Big)dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2m\pi x}{2m\pi}\Big]_{-1}^{1} = 1$$

ועבור $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\langle \sin m\pi x, \sin n\pi x\rangle &= \int_{-1}^{1}\sin m\pi x \sin n\pi x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x\Big)dx = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(n-m)\pi x}{(n-m)\pi} - \frac{\sin(n+m)\pi x}{(n+m)\pi}\Big]_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

ולכן הסידרה $\Big\{\sin n\pi x\Big\}_{n=1}^{\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית .

(ב) עבור מערכת אורתוגונלית, מקדמי פורייה מוכללים נתונים ע"י :

$$c_n = \underbrace{\frac{\langle f(x), \sin n\pi x\rangle}{||\sin n\pi x||^2}}_{\text{מקדמי פורייה מוכללים}}$$

ומכיון שמדובר במערכת אורתונורמלית , כלומר $||\sin n\pi x|| = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, אזי נקבל:

$$n \geq 1 \quad , \quad c_n = \langle f(x), \sin n\pi x\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\, dx$$

עבור הפונקציה $f(x) = x^2 + 7\sin 4\pi x$ נקבל שמקדמי פורייה מוכללים שלה הם :

$$c_n = \langle f(x), \sin n\pi x\rangle = \int_{-1}^{1}(x^2 + 7\sin 4\pi x)\sin n\pi x\, dx = \begin{cases} 7 & ; \ n = 4 \\ 0 & ; \ n \geq 1, n\neq 4\end{cases}$$

(ג) מסעיף (ii) ברור שעבור הפונקציה $f(x) = x^2$ מקדמי פורייה מוכללים שלה הם $c_n = 0$ לכל $n \geq 1$ כלומר $f(x) = x^2 \neq \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n = 0$.
ועבור הפונקציה $f(x) = 7\sin 4\pi x$ מקדמי פורייה מוכללים שלה הם $\cancel{c_4 = 1}$ $c_4 = 7$ ו- $c_n = 0$ לכל $n \neq 4$, כלומר עבורה מתקיים $f(x) = 7\sin 4\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$.

(ד) נשתמש באי־שוויון בסל (או שוויון פרסבל) עבור הפונקציה $f(x) = x^5$ במרחב הפונקציות $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מכיוון ש־ $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית ב־ $C[-1,1]$ ביחס למכפלה פנימית זו, נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \le ||f||^2$ כאשר $b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x \, dx$.

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ מתכנס והאיבר כללי שלו שואף ל־0 נקבל :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} x^5 \sin n\pi x \, dx = 0$$

זהו בדיוק מקרה של הלמה של רימן־לבג .

5. במרחב $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$ הוגדרו שני תתי מרחב:
תת־מרחב של כל הפונקציות האי־זוגיות $W_1 = \{f \in C[-1,1] \ : \ f(-x) = -f(x)\}$
תת־מרחב של כל הפונקציות הזוגיות $W_2 = \{f \in C[-1,1] \ : \ f(-x) = f(x)\}$

(א) נגדיר $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ כאשר $f_1 \in W_1, f_2 \in W_2$. הוכיחו כי f_1 הוא ההיטל האורתוגונלי של f על W_1 ו־ f_2 הוא ההיטל האורתוגונלי של f על W_2, במרחב מכפלה פנימית $C[-1,1]$ הנתון לעיל.

(ב) עבור הפונקציה $f(x) = xe^{-x}$ מצאו את הקרוב הטוב ביותר ב־ W_1 ואת הקרוב הטוב ביותר ב־ W_2.

(ג) יהיו d_1, d_2 מרחקים מן הפונקציה $f(x) = xe^{-x}$ עד תתי המרחב W_1, W_2 בהתאם. חשבו את $d_1^2 - d_2^2$ והסק לאיזה תת מרחב, W_1 או W_2, הפונקציה $f(x) = xe^{-x}$ יותר קרובה.

<u>פתרון:</u>

(א) במרחב מכפלה פנימית הנתון $C[-1,1]$ כל פונקציה זוגית אורתוגונלית לכל פונקציה אי־זוגית כי

$$\langle f^{even}, f^{odd}\rangle = \int_{-1}^{1} f^{even}(x) f^{odd}(x) dx = 0$$

לכן אם $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ כאשר $f_1 \in W_1$ ו־ $f_2(x) \in W_2$ אזי f_1 אורתוגונלי ל־ W_2 ו־ f_2 אורתוגונלי ל־ W_2. מכאן, לפי ההגדרה של היטל אורתוגונלי של איבר במרחב מכפלה פנימית על תת מרחב, מסיקים כי f_1 הוא ההיטל האורתוגונלי של f על W_1 ו־ f_2 הוא ההיטל האורתוגונלי של f על W_2.

(ב) נציג את הפונקציה הנתונה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי־זוגית:

$$f(x) = xe^{-x} = x\big(\cosh(x) - \sinh(x)\big) = \underbrace{x\cosh(x)}_{f_1 \in W_1} + \underbrace{-x\sinh(x)}_{f_2 \in W_2}$$

לפי סעיף א' פונקציות אלה הן ההיטלים האורתוגונליים של f על תתי המרחב W_1 ו־ W_2 בהתאם. על פי המשפט על תכונת האופטימאליות של היטל אורתוגונלי, ההיטל האורתוגונלי של איבר במרחב מכפלה פנימית על תת המרחב הוא הקירוב הטוב ביותר של האיבר בתת מרחב זה. לכן הקירוב הטוב ביותר של הפונקציה $f(x) = xe^{-x}$ ב־ W_1 הוא $f_1(x) = x\cosh(x)$ והקירוב הטוב ביותר שלה ב־ W_2 הוא $f_2(x) = -x\sinh(x)$.

(ג) על פי ההגדרה של המרחק בין איבר לבין תת מרחב במרחב מכפלה פנימית, מתקיים:

$$d_1 = ||f_2|| \quad , \quad d_2 = ||f_1||$$

לכן

$$\begin{aligned}
d_1^2 - d_2^2 &= \int_{-1}^{1} f_2^2(x)dx - \int_{-1}^{1} f_1^2(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^2\sinh^2 x - x^2\cosh^2 x\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2\left(\sinh^2 x - \cosh^2 x\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(-1)dx = -2\int_{0}^{1} x^2 dx = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

מכאן נובע כי $d_1 < d_2$ כלומר הפונקציה $f(x) = xe^{-x}$ יותר קרובה לתת המרחב W_1 של פונקציות אי־זוגיות מאשר לתת המרחב W_2 של פונקציות זוגיות.

תרגול 4 ־ טורי פורייה, הגדרה ותכונות

הגדרות

- $E[-\pi,\pi]$ ־ מרחב ליניארי של הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ המקבלות ערכים ב־ $\mathbb{C}$.
- מכפלה פנימית ־ $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.
- מערכת אורתונורמלית ־ $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos nx,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.
- מקדמי פורייה ־

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$ לכל $n\in\mathbb{N}$

- טור פורייה (ממשי) ־ $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$.
- מכפלה פנימית ־ $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.
- מערכת אורתונורמלית ־ $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
- מקדמי פורייה ־ $c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.
- טור פורייה (מרוכב) ־ $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$.

תכונות

- f **זוגית** ־ $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, f **אי־זוגית** ־ $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$.
- f **ממשית** ־ $c_n=\overline{c_{-n}}$, f **מדומה** ־ $c_n=-\overline{c_{-n}}$.
- $a_0=2c_0$, $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$, $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$, $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$ **לכל** $n\geq 1$.
- $\sum_{n=-m}^{m}c_ne^{inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ **לכל** $m\geq 1$.

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768-1830

1. חשבו טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x\ge 0 \\ -2 & ; \ x<0\end{cases}$

(ב) $f(x)=x$

(ג) $f(x)=Ax^2+Bx+C \quad A,B,C\in\mathbb{R}$

(ד) $f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}$

פתרון: אפשר לחשב טור פורייה של אקספוננטים או של קוסינוסים וסינוסים. (ראה שאלה 3 לקשר ביניהם).

(א)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-2dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}dx=-2+1=-1\\
n\ge 1 \quad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-2\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=\\
&= -\frac{2}{\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_{0}^{\pi}=0\\
n\ge 1 \quad b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-2\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\cos nx}{n}\Big]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos nx}{n}\Big]_{0}^{\pi}=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{1-(-1)^n}{n}\Big]+\frac{1}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\Big]=\\
&= \begin{cases} 0 & ; \ n=2k \\ \frac{1}{\pi}\Big(\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\Big)=\frac{6}{\pi n} & ; \ n=2k-1\end{cases}
\end{aligned}$$

$$f(x)\sim -\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\cdot\sin(2n-1)x$$

(ב) x היא פונקציה אי־זוגית ולכן איברים זוגיים יתאפסו:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx=0\\
n\ge 1 \quad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos nx}{n^2}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}\Big[(-1)^n-(-1)^n\Big]=0\\
n\ge 1 \quad b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\Big[x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-\pi\cos n\pi+(-\pi)\cos n\pi}{n}\Big]+\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n^2}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin nx$$

(ג) ניתן לחשב ישירות , אבל כדאי להשתמש בליניאריות מקדמי פורייה:

$$\begin{aligned}
x &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\
x^2 &\sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \\
Ax^2 + Bx + C &\sim \frac{A\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A(-1)^n}{n^2} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + C \\
&\sim \underbrace{\left(\frac{A\pi^2}{3} + C\right)}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4A(-1)^n}{n^2}}_{a_n} \cos nx + \underbrace{\frac{2B(-1)^{n+1}}{n}}_{b_n} \sin nx
\end{aligned}$$

(ד) אפשר לחשב לפי ההגדרה , אבל כדאי לשים לב כי זוהי פונקציה טריגונומטרית עם ייצוג טריגונומטרי סופי ולכן :

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2x\Big) = 1 - \frac{1}{2}\cos 2x$$

כלומר $a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 3 \;\; a_n = 0$
וכן $\forall n \geq 1 \;\; b_n = 0$.

2. נתון טור פורייה של פונקציה f רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

(א) חשבו $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin^2 nx \, dx$

(ב) חשבו $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos^3 nx \, dx$

<u>פתרון:</u> **זהירות** כאשר כותבים $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ או $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ הסימון " $\sim$ " לא אומר שום דבר לגבי ההתכנסות הטור בצד ימין. הטור יכול לפעמים להתבדר בהרבה נקודות x. סימון זה הוא אך ורק דרך מקוצרת להגיד ש: a_n, b_n או c_n הם מקדמי פורייה של $f(x)$.

(א) נשתמש בזהות טריגונומטרית ונקבל :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Big(\frac{1 - \cos 2nx}{2}\Big) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2nx \, dx = \\
&= \frac{1}{2}\pi a_0 - \frac{1}{2}\pi a_{2n} = \frac{\pi}{2}(a_0 - a_{2n})
\end{aligned}$$

(ב) נחשב את $\cos^3 nx$:

$$\cos^3 nx = \left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3nx}+3e^{inx}+3e^{-inx}+e^{-i3nx}}{8} =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3inx}+e^{-3inx}}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3nx+\frac{3}{4}\cos nx$$

וכעת נקבל:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos^3 nx\, dx = \frac{\pi}{4}a_{3n}+\frac{3\pi}{4}a_n$$

3. נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. ויהיו טורי פורייה הממשי והמרוכב שלה:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \quad , \quad f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

הוכיחו את הקשרים הבאים בין הטורים ומקדמי פורייה:

$$\textstyle\sum_{n=-m}^{m}c_ne^{inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$\begin{cases} a_0=2c_0 \\ a_n=c_n+c_{-n} \quad n\geq 1 \\ b_n=i(c_n-c_{-n}) \quad n\geq 1\end{cases} \qquad \begin{cases} c_0=\dfrac{a_0}{2} \\ c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2} \quad n\geq 1 \\ c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2} \quad n\geq 1\end{cases}$$

פתרון:

$$\sum_{n=-m}^{m}c_ne^{inx} = c_0+\sum_{n=1}^{m}c_ne^{inx}+\sum_{n=1}^{m}c_{-n}e^{-inx} =$$
$$= c_0+\sum_{n=1}^{m}c_n(\cos nx+i\sin nx)+\sum_{n=1}^{m}c_{-n}(\cos nx-i\sin nx) =$$
$$= c_0+\sum_{n=1}^{m}(c_n+c-n)\cos nx+i(c_n-c_{-n})\sin nx$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}$$

$$c_n+c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)2\cos nx\, dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\, dx=a_n$$

$$c_n-c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(-2i)\sin nx\, dx=-i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\, dx=-ib_n$$

4. נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. בכל סעיף מצאו תנאים על a_n, b_n, c_n אשר שקולים לתכונה המצוינת עבור f :

א. $f(x)$ זוגית ב. $f(x)$ אי־זוגית
ג. $f(x)$ ממשית ד. $f(x)$ מדומה
ה. $f(x)$ ממשית וזוגית ו. $f(x)$ ממשית ואי־זוגית
ז. $f(x)$ מדומה וזוגית ח. $f(x)$ מדומה ואי־זוגית

פתרון: נשתמש בזהויות שמצאנו בתרגיל קודם:

(א) $f(x)$ זוגית $\Leftrightarrow$ $b_n = 0$ $\Leftrightarrow$ $c_n = c_{-n}$

(ב) $f(x)$ אי־זוגית $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$ $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$

(ג) $f(x)$ ממשית

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} = c_n + \overline{c_n} = 2Re(c_n) \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) = i(c_n - \overline{c_n}) = i2iIm(c_n) = -2Im(c_n) \end{cases} \Leftrightarrow c_n = \overline{c_{-n}}$$

(ד) $f(x)$ מדומה
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} = c_n - \overline{c_n} = 2iIm(c_n) \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) = i(c_n + \overline{c_n}) = 2iRe(c_n) \end{cases} \Leftrightarrow c_n = -\overline{c_{-n}}$$

(ה) $f(x)$ ממשית וזוגית $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n \text{ ממשי} \\ b_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ ממשי וזוגית $c_n = \overline{c_n}, c_n = c_{-n}$

(ו) $f(x)$ ממשית ואי־זוגית $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \text{ ממשי} \end{cases} \Leftrightarrow$ מדומה ואי־זוגית $c_n = -\overline{c_n}, c_n = -c_{-n}$

(ז) $f(x)$ מדומה וזוגית $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n \text{ מדומה} \\ b_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ מדומה וזוגית $c_n = -\overline{c_n}, c_n = c_{-n}$

(ח) $f(x)$ מדומה ואי־זוגית $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \text{ מדומה} \end{cases} \Leftrightarrow$ ממשי ואי זוגי $c_n = \overline{c_n}, c_n = c_{-n}$

הערה: נשים לב כי בכל הטענות לגבי תכונת הזוגיות או האי־זוגיות של הפונקציה, הכיוון $\Rightarrow$ הוא בהסתייגות כמובן של רציפות הפונקציה . במקרה שהפונקציה רציפה למקוטעין אזי נקבל פונקציה זוגית/אי־זוגית עד כדי מספר סופי (או בן מניה) של נקודות שבהן לא מתקיימת תכונת הזוגיות/אי־זוגיות. במילים אחרות קיימת פונקציה אחרת $\tilde{f}$ שהיא זוגית/אי־זוגית ומתקיים $||f-\tilde{f}|| = 0$.

תרגול 5 - משפטי פרסבל, משפטי התכנסות

$f \in E[-\pi,\pi]$ ועם טור פורייה $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ או $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

- שיויון פרסבל -

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned} .$$

- שיויון פרסבל מוכלל -

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx &= \frac{a_0\overline{A_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{A_n} + b_n\overline{B_n} \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{C_n} \end{aligned}$$

כאשר a_n, b_n או c_n מקדמי פורייה של f ו- A_n, B_n או C_n מקדמי פורייה של g .

- למה של רימן לבג -

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0 \qquad \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n &= 0 \end{aligned} .$$

- משפט התכנסות טור פורייה בנורמה (בממוצע) - $\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_m(x)|^2 dx = 0$ כאשר $f_m(x) =$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}$.

- משפט התכנסות נקודתית (דיריכלה) - אם $f \in E[-\pi,\pi]$ וקיימות הנגזרות החד-צדדיות הסופיות $f'_+(x_0)$ ו- $f'_-(x_0)$ בנקודה $x_0 \in (-\pi,\pi)$, אזי

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0 = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

אם בנוסף קיימות הנגזרות החד-צדדיות הסופיות $f'_+(-\pi)$ ו- $f'_-(\pi)$ אזי בנקודות $x_0 = \pm\pi$ טור פורייה מתכנס לערך: $\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$.

- התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ ו- $f' \in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi,\pi]$.

- התכנסות במידה שווה בקטע $[a,b]$ - אם $f, f' \in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- $\tilde{f}$ בכל תת קטע סגור $[a,b] \subset \mathbb{R}$ שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של $\tilde{f}$, וכאשר $\tilde{f} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
1805-1859

1. תהי f הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & ; \ 0\le x\le \pi\\ x+\pi & ; \ -\pi\le x<0\end{cases}$, ויהי טור פורייה של f בקטע $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

(א) חשב את a_n ו־ b_n .

(ב) נגדיר את הפונקציה $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$. מהי $g(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$? שרטט .

(ג) חשב את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

(ד) לכל x ממשי נגדיר $h(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

חשב את $h(-2\pi)$, $h(10)$.

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב עפ"י ההגדרה:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)dx=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}+\pi x\Big]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\Big]=\frac{\pi}{2}$$

$$n\ge 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos nx}{n^2}\Big]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}\Big[1-(-1)^n\Big]=\begin{cases}0 & ; \ n=2k\\ \frac{2}{\pi n^2} & ; \ n=2k-1\end{cases}$$

$$n\ge 1 \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[x\cdot-\frac{\cos nx}{n}\Big]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}+\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n^2}\Big]_{-\pi}^{0}-\Big[\frac{\cos nx}{n}\Big]_{-\pi}^{0}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{1}{n}-\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\frac{1}{n}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cdot\cos(2n-1)x-\frac{1}{n}\cdot\sin nx$$

(ב) $g(x)$ היא בדיוק החלק האי־זוגי של הטור של $f(x)$, כלומר $g(x)=\frac{\tilde f(x)-\tilde f(-x)}{2}$

וכאשר $\tilde f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$, $-\pi\le x\le\pi$.

יש לבדוק ש־f מקיימת את כל תנאי דיריכלה, ונחשב את $\tilde f(x)$ לפי דיריכלה :

$$\tilde f(x)=\begin{cases}x+\pi & ; \ -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{2} & ; \ x=0\\ 0 & ; \ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x+\pi}{2} & ; \ -\pi\le x<0\\ 0 & ; \ x=0\\ \frac{x-\pi}{2} & ; \ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

(ג) לפי דיריכלה עבור $f(x)$ ב־ $x=0$:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$
$$\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

לפי דיריכלה עבור $f(x)$ ב־ $x=\frac{\pi}{2}$:

$$f(\frac{\pi}{2})=0=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$
$$\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

(ד) $h(x)$ מחזורית 2π ולכן:

$$h(-2\pi)=h(0)=\frac{\pi}{2}$$

מכיון ש־ $-\pi\le 10-4\pi<0$ נקבל:

$$h(10)=h(10-4\pi)=(10-4\pi)+\pi=10-3\pi$$

2. נתונה פונקציה
$$f(x)=\begin{cases}3-Ax & ; \ 0\le x\le\pi\\ B+2x & ; \ -\pi\le x<0\end{cases}$$
עבור אילו ערכים של A ו־B טור פורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

<u>פתרון:</u> לפי משפט ההתכנסות במ"ש :
f רציפה, $f(-\pi)=f(\pi)$, ו־f' רציפה למקוטעין $\Longleftarrow$ טור פורייה מתכנס במ"ש ל־f .
נדרוש רציפות ב־0:

$$f(0^-)=f(0^+)\quad\Longrightarrow\quad 3=B$$

נדרוש שויון בקצוות $-\pi,\pi$:

$$f(-\pi)=f(\pi)\quad\Longrightarrow\quad B+(-2\pi)=3-A\pi\quad\Longrightarrow\quad A=2$$

והנגזרת רציפה למקוטעין
$$f(x)=\begin{cases}-2 & ; \ 0<x<\pi\\ 2 & ; \ -\pi<x<0\end{cases}$$
לכן עבור $B=3$ $A=2$ טור פורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט בקטע $[-\pi,\pi]$.

3. תהי $f \in E[-\pi,\pi]$, זוגית כך ש- $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 5$. מגדירים

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt \quad , \quad -\pi \le x \le \pi \ ,$$

נניח שטור פורייה של $F(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

מגדירים

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad , \quad -\pi \le x \le \pi \ .$$

חשב את $G(0),\ \ G(\pi),\ \ G(-\pi)$.

פתרון: מדיריכלה נקבל:

$$G(\pi) = G(-\pi) = \frac{F(-\pi^+) + F(\pi^-)}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$$

מכיון ש-$F(x)$ רציפה ב-$x=0$ (מדוע ?) נקבל :

$$G(0) = F(0) = \int_{-\pi}^{0} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{5}{2}$$

(הערה: יכולנו להפעיל את משפט דיריכלה כי הנגזרת של F מקיימת $F' = f$ פרט לנקודות הקפיצה של f, שם הנגזרות החד צדדיות של F גם קיימות).

4. תהי $f \in E[-\pi,\pi]$ בעלת טור פורייה

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מצא טור מתכנס, אשר תלוי במקדמי פורייה של f והסכום שלו שווה ל- $\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx$.

פתרון: נשתמש בשויון פרסבל מוכלל :

$$\begin{aligned} x &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\ f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ \Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx &= \pi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} b_n\Big) \end{aligned}$$

תרגול 6 ־ גזירה ואינטגרציה

משפטים

$f \in E[-\pi,\pi]$ ועם טור פורייה
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ או $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

- משפט הגזירה ־ אם f מקיימת:
  1. f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$
  2. $f(-\pi) = f(\pi)$
  3. f' רציפה למקוטעין

  אזי ניתן לגזור איבר איבר את טור פורייה של f, ולקבל את טור פורייה של f' :

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx \quad , \quad f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}$$

הערה: בתנאי המשפט טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל־ f ולכן מתקיים:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad , \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

לכל $x \in [-\pi,\pi]$

- משפט האינטגרציה ־ אם $f \in E[-\pi,\pi]$, אזי ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לטור פורייה של f ולקבל לכל $x \in [-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} (\cos nx - \cos n\pi)$$
$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = c_0(x+\pi) + \sum_{n=-\infty, \neq 0}^{\infty} \frac{c_n}{in} \left(e^{inx} - e^{in\pi}\right)$$

והטור באגף ימין (כולל הפונקציה הליניארית) מתכנס במ"ש לפונקציה באגף שמאל .

הערה 1: במשפט לעיל ניתן לבחור כגבול תחתון כל נקודה $a \in [-\pi,\pi]$, ולקבל:

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = \frac{a_0(x-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\sin nx - \sin na) - \frac{b_n}{n} (\cos nx - \cos na)$$
$$\int_{a}^{x} f(t)dt = c_0(x-a) + \sum_{n=-\infty, \neq 0}^{\infty} \frac{c_n}{in} \left(e^{inx} - e^{ina}\right)$$

ושוב הטור באגף ימין (כולל הפונקציה הליניארית) מתכנס במ"ש לפונקציה באגף שמאל.

<u>הערה 2</u>: ניתן לבצע אינטגרציה לא מסוימת. נגדיר את $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ כלומר:

1. $F(x)$ רציפה ב- $[-\pi,\pi]$,
2. $F'(x)=f(x)$ בכל נקודת רציפות של $f(x)$.

ואז נקבל במשפט האינטגרציה את השיויון:

$$F(x)=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx+K$$
$$F(x)=c_0x+\sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty}\frac{c_n}{in}e^{inx}+K$$

ובמקרה זה ניתן לחשב את K ע"י הצבת x "מתאים" או לפי הנוסחה:

$$K=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx$$

1. מגדירים את $-\pi \le x \le \pi \quad , \quad f(x) = |\sin x|$.

(א) חשב את מקדמי פורייה a_n ו־b_n של f בקטע $[-\pi,\pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

(ב) מגדירים את הפונקציה $g(x)$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx \quad , \quad -\pi \le x \le \pi \ .$$

צייר את הגרף של $g(x)$ בצורה מדוייקת.

(ג) חשב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$$

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב עפ"י ההגדרה :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\ dx = -\frac{2}{\pi}\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos x\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\ dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi} = 0 \\
n \ge 2 \quad a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big[\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\Big] dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{n+1}-1}{1+n} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{1-n}\Big] = \\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\Big] = \begin{cases} 0 & ; \ n = 2k-1 \\ \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & ; \ n = 2k \end{cases} \\
n \ge 1 \quad b_n &= 0
\end{aligned}$$

$$-\pi \le x \le \pi \quad , \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx$$

(ב) מהצבת המקדמים הרלונטיים נקבל :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \cdot \sin 2nx$$

נשים לב כי : $f(x) = |\sin x|$ רציפה , $f(-\pi) = f(\pi)$, ו- f' רציפה למקוטעין , ולכן לפי משפט הגזירה ניתן לגזור איבר איבר את הטור פורייה של f לקבל את טור פורייה של f'. $g(x)$ היא סכום של הטור אשר מתקבל ע"י גזירה איבר איבר של הטור של $f(x) = |\sin x|$, ולמרות שהנגזרת של $|\sin x|$ לא קיימת בנקודות $x = 0, \pm\pi$, נוכל לקבל ע"י משפט הגזירה ומשפט דיריכלה:

$$f'(x) = \Big(|\sin x|\Big)' = \begin{cases} \cos x & ; \ 0 < x < \pi \\ -\cos x & ; \ -\pi < x < 0 \\ \text{לא מוגדר} & ; \ x = -\pi, 0, \pi \end{cases} \qquad g(x) = \widetilde{(f')} = \begin{cases} \cos x & ; \ 0 < x < \pi \\ -\cos x & ; \ -\pi < x < 0 \\ 0 & ; \ x = -\pi, 0, \pi \end{cases}$$

(ג) ממשפט דיריכלה עבור $f(x)$ ב- $x = 0$ נקבל :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2} \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ממשפט דיריכלה עבור $f(x)$ ב- $x = \frac{\pi}{2}$ נקבל :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}(-1)^n \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \Big(1-\frac{2}{\pi}\Big)\cdot\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{2-\pi}{4} \end{aligned}$$

לפי משפט פרסבל עבור $f(x)$ נקבל :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|^2 dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = 1 \\ \Longrightarrow \quad & 1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16} \end{aligned}$$

ולפי משפט פרסבל עבור הנגזרת נקבל :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|^2 dx = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1-4n^2)^2} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)dx = 1 \\ \Longrightarrow \quad & 1 = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64} \end{aligned}$$

2. חשב את טור פורייה של $f(x)=x(x^2-\pi^2)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

פתרון: נשתמש בטור פורייה של x ונבצע איטגרציה:

$$\begin{aligned}
x &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx\\
\frac{x^2}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\cdot-\frac{\cos nx}{n}+K\\
x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx+\underbrace{K}_{\frac{a_0}{2}} \qquad \Longrightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}\\
&\Longrightarrow \quad x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx
\end{aligned}$$

נבצע שוב אינטגרציה על הטור של x^2 :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{x}t^2dt=\int_{-\pi}^{x}\left[\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nt\right]dt\\
&\frac{x^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2(x+\pi)}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\cdot\sin nx\\
&x^3=\pi^2x+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\cdot\sin nx\\
&x(x^2-\pi^2)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\cdot\sin nx
\end{aligned}$$

3. מגדירים את הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}-x & ;\ 0<x<\pi\\ \frac{\pi}{4} & ;\ -\pi<x<0\end{cases}$$

(א) חשב את מקדמי פורייה a_n, b_n של f .

(ב) מגדירים את הטור

$$S(x)=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$$

חשב את $S(x)$ ב-$[-\pi,\pi]$.

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב עפ"י ההגדרה :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\pi}{4}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\frac{2\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi}=0$$

$$n\geq 1\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\pi}{4}\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big[-x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx=\frac{1}{\pi n^2}\Big[-\cos nx\Big]_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}=$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi n^2} & ;\ n=2k-1\\ 0 & ;\ n=2k\end{cases}$$

$$n\geq 1\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big[x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx=\frac{(-1)^n}{n}$$

$$-\pi\leq x\leq\pi\quad,\quad f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin nx$$

(ב) הפונקציה $S(x)$ היא האינטגרל של הסכום של טור פורייה של $f(x)$, ולכן לפי משפט האינטגרציה נקבל :

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
\int_{-\pi}^{x} f(t)dt &= \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}(a_n \sin nt - b_n \cos nt)\right]_{-\pi}^{x} \\
&= \underbrace{\frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)}_{S(x)} + \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n} \\
S(x) &= \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \Big(\frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n}\Big) \\
&= \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n} = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

ולכן נחשב את האינטגרל המסוים של $f(x)$.
עבור $-\pi \le x \le 0$:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{x} \frac{\pi}{4} dt = \frac{(x+\pi)\pi}{4} = \frac{\pi x + \pi^2}{4}$$

ועבור $0 \le x \le \pi$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} f(t)dt &= \int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{4} dt + \int_{0}^{x} \Big(\frac{\pi}{4} - t\Big) dt = \frac{\pi^2}{4} + \int_{0}^{x} \Big(\frac{\pi}{4} - t\Big) dt = \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \left[\frac{\pi}{4} t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi x}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{-2x^2 + \pi x + \pi^2}{4}
\end{aligned}$$

ובסה"כ קיבלנו את $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi x + \pi^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{6} & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{-2x^2 + \pi x + \pi^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{6} & ; \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad S(x) = \begin{cases} \dfrac{3\pi x + \pi^2}{12} & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{-6x^2 + 3\pi x + \pi^2}{12} & ; \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

נפתור את סעיף ב' בדרך שנייה ע"י אינטגרציה לא מסוימת, וכאשר $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ (אחת כלשהי) בקטע $[-\pi,\pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\ F(x) &= \underbrace{\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)}_{S(x)}+K \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ S(x) = F(x)-K$$

וכאשר K קבוע מתאים.
לפי ההגדרה של פונקציה קדומה נמצא את $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{\pi x}{4} & ; \quad -\pi\le x<0 \\ \frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{2} & ; \quad 0<x\le\pi \end{cases}$$

נשים לב לעובדה ש- $\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx=0$ (למה?) ולכן נוכל לחשב את K:

$$0=\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi} F(x)-\int_{-\pi}^{\pi} Kdx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ K &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\pi x}{4}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{2}\right)dx= \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi x^2}{8}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi x^2}{8}-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{\pi^3}{6}\right)=-\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

לכן בסה"כ קיבלנו:

$$S(x)=\begin{cases} \frac{\pi x}{4}+\frac{\pi^2}{12} & ; \quad -\pi\le x\le 0 \\ \frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi^2}{12} & ; \quad 0\le x\le\pi \end{cases}$$

תרגול 7 - טורי פורייה בקטעים שונים, טור קוסינוסים, סינוסים

טור פורייה בקטע $[-L,L]$

- $E[-L,L]$ - אוסף הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[-L,L]$ המקבלות ערכים ב- $\mathbb{C}$.
- מכפלה פנימית - $\langle f,g\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx$ או $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx$.
- מערכת אורתונורמלית - $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ או $\left\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
- מקדמי פורייה -

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$n\geq 1,\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$n\geq 1,\quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

או $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$.

- טור פורייה - $f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ או $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$.
- התכנסות נקודתית - משפט דיריכלה - אם $f\in E[-L,L]$ וקיימות הנגזרות החד-צדדיות $f'_-(x), f'_+(x)$ ב- $x\in(-L,L)$ אזי
$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ או $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.
- התכנסות במידה שווה - אם f רציפה בקטע $[-L,L]$, $f(-L)=f(L)$ ו- $f'\in E[-L,L]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-L,L]$.
- שיויון פרסבל - לכל $f\in E[-L,L]$
$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$ או $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$.
- שיויון פרסבל מוכלל - לכל $f,g\in E[-L,L]$
$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{a_0\overline{A_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{A_n}+b_n\overline{B_n}$ או $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{C_n}$.
- גזירה - אם f רציפה בקטע $[-L,L]$, $f(-L)=f(L)$ ו- $f'\in E[-L,L]$,
אזי ניתן לגזור איבר איבר את טור פורייה של f, ולקבל את טור פורייה של f' :
$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n\pi}{L}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\frac{n\pi}{L}b_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ או $f'(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{in\pi}{L}c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$.
- אינטגרציה - אם $f\in E[-L,L]$, אזי ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לטור פורייה של f ולקבל לכל $x\in[-L,L]$:

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt = \frac{a_0(x+L)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{La_n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-\frac{Lb_n}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-\cos n\pi\right)$$

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt = c_0(x+L)+\sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty}\frac{Lc_n}{in\pi}\left(e^{i\frac{n\pi x}{L}}-e^{in\pi}\right)$$

והטור באגף ימין מתכנס במ"ש לפונקציה באגף שמאל .

טור פורייה בקטע $[a,b]$

- $E[a,b]$ - אוסף הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$ המקבלות ערכים ב- $\mathbb{C}$.
- מכפלה פנימית - $\langle f,g\rangle=\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ או $\langle f,g\rangle=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.
- מערכת אורתונורמלית -
$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right),\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ או $\left\{e^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
- מקדמי פורייה -
$$a_0=\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$
$$n\ge 1,\quad a_n=\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx \qquad \text{או} \qquad c_n=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{b-a}}dx \ .$$
$$n\ge 1,\quad b_n=\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx$$
- טור פורייה -
$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$ או $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}$.
- התכנסות נקודתית - משפט דיריכלה - אם $f\in E[a,b]$ וקיימות הנגזרות החד-צדדיות $f'_-(x),f'_+(x)$ ב- $x\in(a,b)$ אזי
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.
- התכנסות במידה שווה - אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו- $f'\in E[a,b]$
אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a,b]$.
- שיויון פרסבל - לכל $f\in E[a,b]$
$\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b|f(x)|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$ או $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$.
- שיויון פרסבל מוכלל - לכל $f,g\in E[a,b]$
$\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{a_0\overline{A_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{A_n}+b_n\overline{B_n}$ או $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\overline{C_n}$.
- גזירה - אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו- $f'\in E[a,b]$,
אזי ניתן לגזור איבר איבר את טור פורייה של f, ולקבל את טור פורייה של f' :
$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2n\pi}{b-a}a_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)+\frac{2n\pi}{b-a}b_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$ או $f'(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i2n\pi}{b-a}c_ne^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}$.
- אינטגרציה - אם $f\in E[a,b]$, אזי ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לטור פורייה של f ולקבל לכל $x\in[a,b]$:
$$\int\limits_a^x f(t)dt=\frac{a_0(x-a)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b-a)a_n}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)-\frac{(b-a)b_n}{2n\pi}\left(\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)-\cos\left(\frac{2n\pi a}{b-a}\right)\right)$$
$$\int\limits_a^x f(t)dt=c_0(x-a)+\sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty}\frac{(b-a)c_n}{i2n\pi}\left(e^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}-e^{i\frac{2n\pi a}{b-a}}\right)$$

והטור באגף ימין מתכנס במ"ש לפונקציה באגף שמאל .

טור קוסינוסים, סינוסים בקטע $[0,\pi]$

- $f\in E[0,\pi]$ - פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$.
- $f_{even}, f_{odd}\in E[-\pi,\pi]$ הרחבות זוגית ואיזוגית של f לקטע $[-\pi,\pi]$ בהתאמה,

$$f_{even}=\begin{cases} f(-x) & ; \ -\pi\le x<0 \\ f(x) & ; \ 0\le x\le\pi \end{cases} \qquad f_{odd}=\begin{cases} -f(-x) & ; \ -\pi\le x<0 \\ f(x) & ; \ 0<x\le\pi \\ 0 & ; \ x=0 \end{cases}$$

- טור קוסינוסים של f בקטע $[0,\pi]$ - הוא טור פורייה של f_{even} בקטע $[-\pi,\pi]$, כלומר:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) \quad \text{כאשר} \quad \begin{aligned} a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx \\ n\ge 1,\quad a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx \end{aligned}.$$

- טור סינוסים של f בקטע $[0,\pi]$ - הוא טור פורייה של f_{odd} בקטע $[-\pi,\pi]$, כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx) \quad \text{כאשר} \quad n\ge 1,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx \ .$$

- התכנסות נקודתית - משפט דיריכלה - אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות $f'_-(x), f'_+(x)$ ב- $x\in[0,\pi)$ אזי

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} \ .$$

- התכנסות במידה שווה -

  * אם f רציפה בקטע $[0,\pi]$ ו- $f'\in E[0,\pi]$
    אזי טור קוסינוסים של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[0,\pi]$.
  * אם f רציפה בקטע $[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$ ו- $f'\in E[0,\pi]$
    אזי טור סינוסים של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[0,\pi]$.

1. (א) חשב את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

(ב) חשב את טור פורייה של הפונקציה $g(x) = x^2$ בקטע $[-\pi, \pi]$:

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

(ג) מגדירים את הפונקציה

$$h(x) = \frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - A_n) \cos nx + (b_n - B_n) \sin nx \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$$

חשב את $h(x)$. צייר את הגרף של $h(x)$ בצורה מדוייקת בקטע $[-\pi, \pi]$.

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב עפ"י ההגדרה :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3} \\
n \geq 1 \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \Big[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2x \cdot \frac{\sin nx}{n} dx = \\
&= -\frac{2}{\pi n} \Big[x \cdot -\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} -\frac{\cos nx}{n} \, dx = \frac{4}{n^2} \\
n \geq 1 \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \Big[x^2 \cdot -\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2x \cdot \frac{\cos nx}{n} dx = \\
&= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n} \Big[x \cdot \frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx = -\frac{4\pi}{n}
\end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad , \quad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$$

(ב) נחשב עפ"י ההגדרה :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \\
n \geq 1 \quad A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \Big[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin nx}{n} dx = \\
&= -\frac{2}{\pi n} \Big[x \cdot -\frac{\cos nx}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos nx}{n} \, dx = \frac{4(-1)^n}{n^2} \\
n \geq 1 \quad B_n &= 0
\end{aligned}$$

$$-\pi \le x \le \pi \quad , \quad x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cdot \cos nx$$

(ג) יהי $\widetilde{f(x)}$ סכום של טור פורייה של $f(x)$, ו- $\widetilde{g(x)}$ סכום של טור פורייה של $g(x)$. לפי משפט דיריכלה נקבל :

$$\widetilde{f(x)} = \begin{cases} (x+2\pi)^2 & ; \ -\pi \le x < 0 \\ x^2 & ; \ 0 < x \le \pi \\ 2\pi^2 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{g(x)} = \begin{cases} x^2 & ; \ -\pi \le x \le 0 \\ x^2 & ; \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$h(x) = \widetilde{f(x)} - \widetilde{g(x)} = \begin{cases} 4\pi x + 4\pi^2 & ; \ -\pi \le x < 0 \\ 0 & ; \ 0 < x \le \pi \\ 2\pi^2 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

2. תהי הפונקציה $f(x) = \min\left\{1, |x|\right\}$.

(א) חשב את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

(ב) חשב את $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

<u>פתרון:</u> בקטע $[-2,2]$ טור פורייה נראה מהצורה $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

(א) עפ"י ההגדרה :

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2} dx = \frac{3}{2}$$

$$n \ge 1 \quad a_n = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2} = \left[x \cdot \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^2} & ; \ n = 4k-3 \\ -\frac{8}{\pi^2 n^2} & ; \ n = 4k-2 \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2} & ; \ n = 4k-1 \\ 0 & ; \ n = 4k \end{cases}$$

$$n \ge 1 \quad b_n = 0$$

$$f(x) \sim \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos(2n-1)\pi x - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

(ב) ממשפט דיריכלה ב- $x = 0$ נקבל :

$$0 = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

לפי משפט פרסבל :

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2$$
$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|f(x)|^2dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} + \frac{4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

3. תהי הפונקציה $f(x) = \sin x$.

(א) חשב טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$.

(ב) חשב את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

<u>פתרון:</u>

(א) טור פורייה של f בקטע $[0,\pi]$ הוא מהצורה $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nx + b_n \sin 2nx$.

נחשב עפ"י ההגדרה :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ dx = -\frac{2}{\pi}\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\Big]dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(1+2n)x}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{2n+1}-1}{1+2n} + \frac{(-1)^{2n-1}-1}{1-2n}\Big] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\Big] = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$$n \geq 1 \quad b_n = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad , \quad \sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx$$

(ב) ממשפט דיריכלה ב־ $x=0$ נקבל :

$$0=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}$$
$$\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

לפי משפט פרסבל נקבל :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$$
$$\Longrightarrow\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=1$$
$$\Longrightarrow\quad 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$
$$\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

4. תהי הפונקציה $x\in\mathbb{R}\ \ ,\ \ f(x)=\sin x$.

(א) חשב טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[0,2\pi]$.

(ב) חשב טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$.

(ג) חשב טור סינוסים של $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$.

(ד) חשב טור קוסינוסים של $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$.

(ה) נגדיר את הפונקציה

$$G(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\ \ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$

כאשר הטור הוא הטור שחושב ב־ ד'. חשב את האינטגרלים :

$$\int_{-\pi}^{\pi}G^2(t)dt\ \ ,\ \ \int_{\pi}^{9\pi}G^2(t)dt\ \ ,\ \ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}G^2(t)dt$$

<u>פתרון:</u>

(א) אם $f(x)$ פולינום טריגונומטרי ב־ $[0,2\pi]$, כלומר $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$, אזי זהו טור פורייה שלה בקטע $[0,2\pi]$. לכן טור פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ בקטע $[0,2\pi]$ הוא $\sin(x)$.

(ב) בקטע $[0,\pi]$ טור פורייה של $f(x)$ הוא $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx$,
כאשר :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\frac{2}{\pi}\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\Big]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(1+2n)x}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{2n+1}-1}{1+2n} + \frac{(-1)^{2n-1}-1}{1-2n}\Big] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\Big] = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$$n \geq 1 \quad b_n = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad , \quad \sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx$$

(ג) ההרחבה האי־זוגית של $\sin x$ מהקטע $[0,\pi]$ לקטע $[-\pi,\pi]$ היא בדיוק $\sin x$ בקטע $[-\pi,\pi]$, ולכן טור הסינוסים של f בקטע $[0,\pi]$ הוא: $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) \sim \sin(x)$.

(ד) ההרחבה הזוגית של $\sin x$ מהקטע $[0,\pi]$ לקטע $[-\pi,\pi]$ היא בדיוק $|\sin x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$, וטור הקוסינוסים של f בקטע $[0,\pi]$ זהה לטור שחישבנו בסעיף ב' עבור טור פורייה של $f(x) = \sin x$ בקטע $[0,\pi]$:

$$0 \leq x \leq \pi \quad , \quad \sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx$$

(ה) לפי סעיף ד' $G(x) = |\sin x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ולכן:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|^2 dt = 2\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt = \pi$$

$$\int_{\pi}^{9\pi} G^2(t)dt = \int_{\pi}^{9\pi} |\sin t|^2 dt = \int_{\pi}^{3\pi} \cdots + \int_{3\pi}^{5\pi} \cdots + \int_{5\pi}^{7\pi} \cdots + \int_{7\pi}^{9\pi} \cdots = 4\pi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G^2(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = \frac{\pi}{2}$$

תרגול 8 ־ התמרת פורייה הגדרה ותכונות

הגדרות

- f רציפה למקוטעין מעל $\mathbb{R}$ ־ אם f רציפה למקוטעין בכל קטע סופי $[a,b]$.
- f אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$ ־ אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$.
- $G(\mathbb{R})$ ־ אוסף הפונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ ומקבלות ערכים ב־ $\mathbb{C}$, שהן הרציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט.
- $f\in G(\mathbb{R})$, התמרת פורייה של f ־ נתונה ע"י

$$F(w)=\mathcal{F}[f](w)=\hat{f}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx$$

משפטים

- $f\in G(\mathbb{R})$ ותהי $F(w)$ התמרת פורייה של $f(x)$. אזי,
  1. $F(w)$ מוגדרת לכל $w\in\mathbb{R}$.
  2. F רציפה ב־ $\mathbb{R}$.
  3. $\lim_{w\to\pm\infty}F(w)=0$.

תכונות

- ליניאריות ־ $f,g\in G(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ אזי $\mathcal{F}[\alpha f+\beta g](w)=\alpha\mathcal{F}[f](w)+\beta\mathcal{F}[g](w)$.
- f זוגית ־ $F(-w)=F(w)$, f אי־זוגית ־ $F(-w)=-F(w)$.
- f ממשית ־ $F(-w)=\overline{F(w)}$, f מדומה ־ $F(-w)=-\overline{F(w)}$.
- $f(x)\in G(\mathbb{R})$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ ותהא $g(x)=f(ax+b)$. אזי $\mathcal{F}[g](x)=\frac{1}{|a|}\cdot e^{\frac{iwb}{a}}\cdot\mathcal{F}[f]\left(\frac{w}{a}\right)$.
- $f(x)\in G(\mathbb{R})$, $c\in\mathbb{R}$, ותהא $g(x)=e^{icx}\cdot f(x)$. אזי $\mathcal{F}[g](x)=\mathcal{F}[f](w-c)$.

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768-1830

1. חשב התמרת פורייה עבור הפונקציות הבאות:

(א) $$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

(ב) $$f(x) = \begin{cases} \sin x e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

(ג) $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ e^{2x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

(ד) $$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad |x| \leq a \\ 0 & ; \quad \text{אח'} \end{cases}$$

(ה) $$f(x) = \begin{cases} e^{a|x|} & ; \quad |x| \leq M \\ 0 & ; \quad \text{אח'} \end{cases}$$

(ו) $$f(x) = \begin{cases} \cos n|x| & ; \quad |x| \leq M \\ 0 & ; \quad \text{אח'} \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

(א) x^2 אינה אינטגרבילית בהחלט אבל $x^2 e^{-x}$ כן אינטגרבילית בתחום $x \geq 0$. נחשב עפ"י ההגדרה וע"י אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\cdot e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-(iw+1)x}dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[x^2\frac{e^{-(iw+1)x}}{-(iw+1)}\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 2x\cdot\frac{e^{-(iw+1)x}}{-(iw+1)}dx = \\ &= \frac{1}{\pi(iw+1)}\Big[x\cdot\frac{e^{-(iw+1)x}}{-(iw+1)}\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{\pi(iw+1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(iw+1)x}}{-(iw+1)}dx = \\ &= \frac{1}{\pi(iw+1)^2}\Big[\frac{e^{-(iw+1)x}}{-(iw+1)}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(1+iw)^3} \end{aligned}$$

(ב) $e^{-x}\cdot\sin x$ אינטגרבילית בהחלט בתחום $x \geq 0$ כי $\sin x$ חסומה ו- e^{-x} אינטגרבילית בהחלט.
ניתן לפתור בחלקים אבל זה קצת מסובך, ונפתור ע"י הצגה מרוכבת :

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big)e^{-iwx}dx = \frac{1}{4\pi i}\int_0^{\infty}\Big(e^{-x(-i+1+iw)} - e^{-x(i+1+iw)}\Big)dx = \\ &= \frac{1}{4\pi i}\Big[\frac{e^{-x(-i+1+iw)}}{-(-i+1+iw)} - \frac{e^{-x(i+1+iw)}}{-(i+1+iw)}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{4\pi i}\Big[\frac{1}{-i+1+iw} - \frac{1}{i+1+iw}\Big] = \\ &= \frac{1}{4\pi i}\Big[\frac{1}{(1+iw)-i} - \frac{1}{(1+iw)+i}\Big] = \frac{1}{4\pi i}\cdot\frac{2i}{(1+iw)^2+1} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(1+iw)^2+1} \end{aligned}$$

(ג) ברור ש־$f(x) \in G(\mathbb{R})$, ונחשב :

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{2x}e^{-iwx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(-iw+2)x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{(-iw-1)x}dx = \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{(-iw+2)x}}{-iw+2}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{(-iw-1)x}}{-iw-1}\Big]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1}{2-iw}+\frac{1}{1+iw}\Big] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{3}{w^2+iw+2}
\end{aligned}$$

(ד) לפונקציה יש $support$ סופי ולכן אינטגרבילית בהחלט, כלומר $f(x) \in G(\mathbb{R})$, ונחשב:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} xe^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\Big[x\cdot\frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big]_{-a}^{a} - \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{-iwx}}{-iw}dx = \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-iw}\Big(ae^{-iwa}-(-a)e^{-iw(-a)}\Big) + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{iw}\Big[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big]_{-a}^{a} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{a}{-iw}\Big(e^{iwa}+e^{-iwa}\Big)+\frac{1}{w^2}\Big(e^{-iwa}-e^{iwa}\Big)\Big] = \\
&= \frac{ai}{\pi w}\cos wa - \frac{i}{\pi w^2}\sin wa \quad , \quad w \neq 0
\end{aligned}$$

נשים לב כמובן שעבור $w=0$ החישוב הישיר נותן $F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} xdx = 0$, וניתן לבדוק מרציפות ההתמרה ש־ $\lim_{w\to 0} F(w) = 0$.

(ה) לפונקציה יש $support$ סופי ולכן אינטגרבילית בהחלט, ונחשב:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} e^{a|x|}e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{0} e^{-ax}e^{-iwx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{M} e^{ax}e^{-iwx}dx = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{0} e^{(-iw-a)x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{M} e^{(a-iw)x}dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{(-iw-a)x}}{-iw-a}\Big]_{-M}^{0} + \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{(a-iw)x}}{a-iw}\Big]_{0}^{M} = \\
&= \frac{1}{2\pi(a^2+w^2)}\Big[-2a+ae^{aM}(e^{iw}+e^{-iw})-iwe^{aM}(e^{iw}-e^{-iw})\Big] = \\
&= \frac{1}{\pi(a^2+w^2)}\Big[-a+ae^{aM}\cos w+we^{aM}\sin w\Big]
\end{aligned}$$

(ו) לפונקציה יש $support$ סופי ולכן אינטגרבילית בהחלט, ונחשב:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\cos n|x|\cdot e^{-iwx}dx = \ldots$$

ניתן להמשיך בעזרת אינטגרציה בחלקים אבל כדאי להעזר בזהות $\cos n|x| = \frac{e^{in|x|}+e^{-in|x|}}{2}$ ובתכונת הליניאריות של התמרת פורייה:

$$\mathcal{F}[\cos n|x|\cdot\chi_{[-M,M]}](w) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{in|x|}\cdot\chi_{[-M,M]}](w) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-in|x|}\cdot\chi_{[-M,M]}](w)$$

ולחישוב ההתמרות באגף ימין ניתן להשתמש בתוצאת הסעיף הקודם ולקבל:

$$F(w)\frac{\sin(2wM)}{2\pi(w+n)}$$

2. הוכח את התכונות הבאות של התמרת פורייה לכל $f \in G(\mathbb{R})$:

(א) f ממשית $\Leftrightarrow F(-w) = \overline{F(w)}$, f מדומה $\Leftrightarrow F(-w) = -\overline{F(w)}$.

(ב) f זוגית $\Leftrightarrow F(-w) = F(w)$, f אי-זוגית $\Leftrightarrow F(-w) = -F(w)$.

<u>הערה:</u> הטענה בכיוון $\Rightarrow$ נכונה במקרה הכללי רק בנקודות רציפות של הפונקציה $f(x)$. בנקודות אי-רציפות נכונות הטענה תלוייה בהגדרת ערכי $f(x)$ בנקודות אלו.

<u>פתרון:</u>

(א) f ממשית $\Leftarrow$

$$F(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{-iwx}}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx} = \overline{F(w)}$$

$$0 = F(-w) - \overline{F(w)} \quad \Leftarrow \quad F(-w) = \overline{F(w)}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx - \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{f(x)} - f(x)\right)e^{-iwx}dx} \ \Rightarrow \overline{f(x)} = f(x)$$

f מדומה $\Leftarrow$

$$F(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{-f(x)e^{-iwx}}dx = -\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx} = -\overline{F(w)}$$

$$0 = F(-w) + \overline{F(w)} \quad \Leftarrow \quad F(-w) = -\overline{F(w)}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx + \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{f(x)} + f(x)\right)e^{-iwx}dx} \ \Rightarrow \overline{f(x)} = -f(x)$$

(ב) f זוגית $\Leftarrow$

$$F(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = F(w)$$

$$0 = F(-w) - F(w) \quad \Leftarrow \quad F(-w) = F(w)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f(-x)\right)e^{-iwx}dx \ \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

f אי-זוגית $\Leftarrow$

$$F(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-iwx}dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = -F(w)$$

$$0 = F(-w) + F(w) \quad \Leftarrow \quad F(-w) = -F(w)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(-x) + f(x)\right)e^{-iwx}dx \ \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

3. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

<u>פתרון:</u> למרות שניתן לחשב בקלות את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ לא קיימת פונקציה קדומה "פשוטה לתאור" לפונקציה e^{-x^2}.

לכן נחשב את ההתמרה בצורה עקיפה ע"י שימוש בגזירה תחת סימן האינטגרל:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iwx}dx \\
F'(w) &= \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iwx}dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-ix)e^{-iwx}dx = \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-2xe^{-x^2})e^{-iwx}dx = \frac{i}{4\pi}\left[\underbrace{e^{-x^2}e^{-iwx}\,|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-iwe^{-iwx})dx\right] = \\
&= -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-iw)e^{-iwx}dx = -\frac{w}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iwx}dx = -\frac{w}{2}\cdot F(w)
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו שהתמרת פורייה של f מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה

$$F'(w) + \frac{w}{2}F(w) = 0$$

אשר פתרונה הכללי הוא: $F(w) = Ae^{-\frac{w^2}{4}}$.

נציב $w = 0$ בהגדרה של F כדי לחשב את A, כי $F(0) = A$ שמבטיח פתרון יחיד, ונקבל:

$$A = F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{iw0}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

לכן בסה"כ קיבלנו שהתמרת פורייה של e^{-x^2} היא $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{w^2}{4}}$ וברישום מקוצר:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(w) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{w^2}{4}}$$

דרך שנייה: נראה בקרוב תכונות נוספות של התמרת פורייה:

$$\begin{aligned}
f(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(w) \\
f'(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} iwF(w) \\
xf(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} iF'(w)
\end{aligned}$$

ובמקרה שלנו $f(x) = e^{-x^2}$ כלומר $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ו- $xf(x) = xe^{-x^2}$, ולכן $f'(x) = -2xf(x)$ ומכאן נקבל את אותה המשוואה הדיפרנציאלית:

$$iwF(w) = -2iF'(w) \quad \Rightarrow \quad F'(w) = \frac{w}{2}F(w) = 0$$

וההמשך מכאן זהה.

4. ידוע כי: $f(x) = e^{-x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(w) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}}$.

מצא התמרת פורייה של $g(x) = e^{-4x^2-4x-1}$.

<u>פתרון:</u> נשים לב כי :

$$g(x) = e^{-4x^2-4x-1} = e^{-(2x+1)^2} = f(2x+1)$$

ולכן נוכל להשתמש בתכונות ההזזה והכפל בסקלר - $shift$ ו-$scale$ - של התמרת פורייה:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(w) \\ f(ax+b) \quad &\xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{|a|} e^{\frac{iwb}{a}} F(\frac{w}{a}) \end{aligned}$$

ובמקרה שלנו $a = 2, b = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x^2} \quad &\xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(w) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}} \\ g(x) = f(2x+1) \quad &\xrightarrow{\mathcal{F}} \quad G(w) = \frac{1}{2} e^{\frac{iw}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\frac{w}{2})^2}{4}} \end{aligned}$$

5. נסתכל על טרנספורם פורייה $\mathcal{F}$ כעל אופרטור הפועל על $G(\mathbb{R})$ - שהוא מרחב ליניארי של הונקציות הרציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט ב- $\mathbb{R}$.

חשב פונקציה עצמית, ומצא את הערך העצמי המתאים לה.

<u>פתרון:</u> ידוע כי :

$$e^{-x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

וזו כמעט פונקציה עצמית, ולכן נסתכל על :

$$\begin{aligned} & e^{-(ax)^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{a} e^{\frac{iw\cdot 0}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\frac{w}{a})^2}{4}} \\ \Longrightarrow \quad & e^{-(ax)^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{w}{2a})^2} \end{aligned}$$

נדרוש $a^2 = \frac{1}{4a^2}$ ונקבל :

$$a^4 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = \pm\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ובסה"כ קיבלנו :

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

או בכתיב מפורש :

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{ערך עצמי}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{w^2}{2}}}_{\text{פונקציה עצמית}}$$

מכאן נובע ש- $e^{-\frac{x^2}{2}}$ היא פונקציה עצמית של האופרטור $\mathcal{F}$ במרחב $G(\mathbb{R})$. קל לוודא שזו לא פונקציה עצמית יחידה של התמרת פורייה למשל $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ היא גם פונקציה עצמית של $\mathcal{F}$ במרחב $G(\mathbb{R})$ (מהו הערך העצמי במקרה זה?)

תרגול 9 - התמרת פורייה, המשך תכונות

$f \in G(\mathbb{R})$, ו- $F(w)=\mathcal{F}[f](w)=\hat{f}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx$ התמרת פורייה של f.

תכונות

- ליניאריות - $f,g \in G(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{F}[\alpha f+\beta g](w)=\alpha\mathcal{F}[f](w)+\beta\mathcal{F}[g](w)$
- f זוגית - $F(-w)=F(w)$, f אי-זוגית - $F(-w)=-F(w)$
- f ממשית - $F(-w)=\overline{F(w)}$, f מדומה - $F(-w)=-\overline{F(w)}$
- הזזה - $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\quad \mathcal{F}[f(ax+b)](x)=\frac{1}{|a|}\cdot e^{\frac{iwb}{a}}\cdot\mathcal{F}[f]\left(\frac{w}{a}\right)$
- כפל באקספוננט - $c \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}[e^{icx}\cdot f(x)](x)=\mathcal{F}[f](w-c)$
- מודולציה עם $\cos(x)$ - $c \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}[\cos(cx)f(x)](w)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}[f](w-c)+\mathcal{F}[f](w+c)\right]$
- מודולציה עם $\sin(x)$ - $c \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}[\sin(cx)f(x)](w)=\frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}[f](w-c)-\mathcal{F}[f](w+c)\right]$
- נגזרת - $f'(x) \in G(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ $\quad \mathcal{F}[f'(x)](w)=iw\mathcal{F}[f](w)$
- נגזרת מסדר n - $f^{(k)}(x) \in G(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f^{(k-1)}(x)=0$, $1 \leq k \leq n$
  $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](w)=(iw)^n\mathcal{F}[f](w)$
- מומנט - $xf(x) \in G(\mathbb{R})$ $\quad \mathcal{F}[xf(x)](w)=i\frac{d}{dw}\left(\mathcal{F}[f](w)\right)$
- מומנט מסדר n - $x^nf(x) \in G(\mathbb{R})$ $\quad \mathcal{F}[x^nf(x)](w)=i^n\frac{d^n}{dw^n}\left(\mathcal{F}[f](w)\right)$

1. מצא התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ -a \le x \le a \\ 0 & ; \ \text{אח'} \end{cases}$.

פתרון: נחשב לפי ההגדרה :

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big]_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-iwa}-e^{iwa}}{-iw}\Big] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin aw}{w}$$

2. מצא התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} x & ; \ -a \le x \le a \\ 0 & ; \ \text{אח'} \end{cases}$.

פתרון:
דרך 1: עפ"י ההגדרה .
דרך 2: הפונקציה "1" בקטע $[-a,a]$ רציפה למקוטעין ואיטגרבילית בהחלט , כלומר $"1" \in G(\mathbb{R})$.

כמו כן מתקיים $\int_{-a}^{a} |x\cdot 1|\, dx < \infty$ ולכן ניתן להשתמש בתכונת המומנט של התמרת פורייה:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$

$$xf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\frac{d}{dw}F(w)$$

ובמקרה שלנו :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \ -a \le x \le a \\ 0 & ; \ \text{אח'} \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin aw}{w}$$

$$f(x) = \begin{cases} x\cdot 1 & ; \ -a \le x \le a \\ 0 & ; \ \text{אח'} \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad i\frac{d}{dw}\Big(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin aw}{w}\Big) = \frac{i}{\pi^2 w^2}\Big(aw\cos aw - \sin aw\Big)$$

3. תהי $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט ורציפה למקוטעין ב- $\mathbb{R}$. $F(w)$ התמרת פורייה של $f(x)$.

נגדיר $g(x) = f(2x+1)\cos 3x$.

מהי $G(w)$ - התמרת פורייה של $g(x)$?

פתרון: נשתמש בתכונות התמרת פורייה :

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$

$$f(2x+1) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{iw\cdot 1}{2}}F\Big(\frac{w}{2}\Big)$$

$$f(2x+1)\cos 3x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{i(w-3)\cdot 1}{2}}F\Big(\frac{w-3}{2}\Big) + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{i(w+3)\cdot 1}{2}}F\Big(\frac{w+3}{2}\Big)\Big]$$

4. $F(w)$ התמרת פורייה של $f(x)$. $f(x)$ רציפה וגזירה . f, f' אינטגרביליות בהחלט .

נגדיר $g(x) = f'(x+3)$.

מהי $G(w)$ - התמרת פורייה של $g(x)$?

פתרון: נשתמש בתכונות התמרת פורייה (ונשים לב כי פעולת ההזזה והגזירה חילופיות רק בגלל שהנגזרת הפנימית שווה ל- 1) :

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & F(w) \\ f'(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iw\cdot F(w) \\ f'(x+3) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{iw\cdot 3}\cdot iw\cdot F(w) \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & F(w) \\ f(x+3) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{iw\cdot 3}\cdot F(w) \\ f'(x+3) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iw\cdot e^{iw\cdot 3}\cdot F(w) \end{array}$$

5. נתונה הפונקציה $0 < a \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\cdot \sin x\cdot e^{-a|x|}$.

חשב:

$$I = \int_0^\infty \left(F(w) - \overline{F(w)}\right) dw$$

פתרון: ניתן לחשב במפורש את ההתמרה $F(w)$ ולהציב באינטגרל - ארוך ומסובך .

כדאי לשים לב ש- $f(x)$ ממשית וזוגית ,

ועבור $f(x)$ ממשית :

$$F(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{-iwx}}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx} = \overline{F(w)}$$

ועבור $f(x)$ זוגית :

$$F(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = F(w)$$

ולכן בסה"כ נקבל $F(w) = \overline{F(w)}$, כלומר :

$$I = \int_0^\infty \left(F(w) - \overline{F(w)}\right) dw = 0$$

תרגיל 10 - התמרת פורייה הפוכה, משפט פלנשרל

משפטים

- משפט ההתמרה ההפוכה - $f \in G(\mathbb{R})$, אזי בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ שבה קיימות הנגזרות החד-צדדיות מתקיים השיוון:

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{F}[f](w)e^{iwx}dw$$

- נוסחת פלנשרל - $f \in G(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ אזי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](w)|^2 dw$$

- נוסחת פלנשרל המוכללת - $f, g \in G(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, ו- $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$ אזי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](w)\overline{\mathcal{F}[g](w)}dw$$

- התמרה כפולה - $f, \mathcal{F}[f] \in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[f]\right](x) = \frac{1}{2\pi}f(-x)$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768-1830

Michel Plancherel
1885-1967

1. ידוע כי: $F(w) = \dfrac{1}{\pi(1+w^2)} \quad \xleftarrow{\mathcal{F}} \quad f(x) = e^{-|x|}$.

חשב התמרת פורייה של $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

פתרון: אם $f \in G(\mathbb{R})$ אזי בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ שבה יש נגזרות חד-צדדיות מתקיים השויון:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} F(w) e^{iwx} dw$$

ולכן במקרה שלנו :

$$\pi e^{-|x|} = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{1}{1+w^2} \cdot e^{iwx} dw$$

נחליף בין x ל- w ונקבל :

$$\pi e^{-|w|} = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{iwx} dx$$

ונציב $-dx' \leftrightarrow dx \implies -x' \leftrightarrow x$:

$$\pi e^{-|w|} = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{-iwx} dx = 2\pi \mathcal{F}\Big[\frac{1}{1+x^2}\Big](w)$$

ולכן $F(w) = \frac{1}{2} e^{-|w|}$.

באופן כללי זהו עיקרון הדואליות של התמרת פורייה:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & F(w) \\ F(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{2\pi} f(-w) \end{array}$$

ובמקרה שלנו נקבל :

$$e^{-|x|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{\pi(1+w^2)}$$

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2\pi} e^{-|w|}$$

$$\implies \quad \frac{1}{1+x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2} e^{-|w|}$$

2. נגדיר את הפונקציה :

$$g_l(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad |t| \le \frac{l}{2} \\ 0 & ; \quad t > \frac{l}{2} \end{cases} \qquad , \qquad l > 0$$

(א) חשב $\mathcal{F}[g_l](w)$.

(ב) חשב בעזרת התמרה הפוכה את $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w}\, dw$.

(ג) חשב $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cdot \cos w}{w}\, dw$.

<u>פתרון:</u>

(א) עפ"י ההגדרה :

$$G_l(w) = \mathcal{F}[g_l](w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 1 \cdot e^{-iwx} dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-iw\frac{l}{2}} - e^{iw\frac{l}{2}}}{-iw}\Big] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{l}{2} w}{w}$$

(ב) מההתמרה ההפוכה נקבל:

$$\tilde{g}_l(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad |t| < \frac{l}{2} \\ \frac{1}{2} & ; \quad t = -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \\ 0 & ; \quad t > \frac{l}{2} \end{cases} \quad = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{wl}{2})}{\pi w} e^{iwt} dw$$

ועבור $l = 2$:

$$\tilde{g}_2(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad t = -1, 1 \\ 0 & ; \quad t > 1 \end{cases} \quad = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{\pi w} e^{iwt} dw$$

נבחר $t = 0$ ונכפול ב- π :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w}\, dw = \pi \cdot \tilde{g}_2(0) = \pi \cdot 1 = \pi$$

(ג) ניתן להשתמש בזהות טריגונומטרית:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cdot \cos w}{w}\, dw = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2w}{2w}\, dw = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

אבל נפתור באופן כללי: נבחר $l = 2$ ו- $t = 1$,

$$\tilde{g}_2(1) = \frac{1}{2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{\pi w} e^{iw}\, dw = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cos w}{w}\, dw + \underbrace{\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \sin w}{w}\, dw}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cos w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}$$

3. לכל $a>0$ נגדיר את הפונקציה:

$$f_a(x)=\begin{cases} a-|x| & ; \quad |x|<a \\ 0 & ; \quad |x|>a \end{cases}$$

(א) מצא התמרת פורייה של $f_a(x)$.

(ב) חשב את $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos w)(1-\cos 2w)}{w^4}\,dw$.

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} F_a(w) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(x)e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}(a-|x|)e^{-iwx}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a}(a-x)\cos wx\,dx = \\ &= \frac{a}{\pi}\int\limits_{0}^{a}\cos wx\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a}x\cos wx\,dx = \\ &= \frac{a}{\pi}\Big[\frac{\sin wx}{w}\Big]_0^a - \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x\sin wx}{w}\Big]_0^a - \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos wx}{w^2}\Big]_0^a = \\ &= \frac{1-\cos wa}{\pi w^2} \end{aligned}$$

(ב) לפי פלנשרל מוכלל:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos w)(1-\cos 2w)}{w^4}\,dw &= \pi^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)(2-|x|)dx = \\ &= \pi\int\limits_{0}^{1}(2-3x+x^2)dx = \\ &= \pi\Big[2x-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \pi\Big[2-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\Big] = \\ &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

4. תהיה $g(x) \in G(\mathbb{R})$ כך ש:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad |x| \le 1 \\ 4 & ; \quad 1 < |x| \le 2 \\ 0 & ; \quad 2 < |x| \end{cases}$$

(א) חשב את $\hat{g}(w)$.

(ב) חשב את $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\sin 2t - \sin t)^2}{t^2} dt$.

<u>פתרון:</u>

(א) <u>דרך 1</u>: חישוב ישיר .
<u>דרך 2</u>: נגדיר את הפונקציה :

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| \le a \\ 0 & ; \quad a < |x| \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F_a(w) = \frac{\sin wa}{\pi w}$$

ונשים לב כי: $g(x) = 4 \cdot f_2(x) - 2 \cdot f_1(x)$.
ולכן מליניאריות התמרת פורייה נקבל ,

$$\tilde{g}(w) = 4 \cdot \frac{\sin 2w}{\pi w} - 2 \cdot \frac{\sin w}{\pi w} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\sin 2w - \sin w}{w}\right)$$

(ב) מפלנשרל נקבל :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\sin 2t - \sin t)^2}{t^2} dt = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = \frac{\pi}{8}(16 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 16 \cdot 1) = 5\pi$$

תרגיל 11 - קונבולוציה, שימושים

- $f,g\in G(\mathbb{R})$, הקונבולוציה של f ו- g נתונה ע"י $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy$.
- תכונות הקונבולוציה - לכל $f,g,h\in G(\mathbb{R})$,
  1. $(f*g)*h=f*(g*h)$.
  2. $f*g=g*f$.
  3. $f(x)*\delta(x)=\delta(x)*f(x)=f(x)$ ($\delta(x)$ היא פונקציית דלתא של דירק) .
- $support(f)$ - התומך של f - התחום שבו $f(x)\neq 0$.
  אם f,g אי-שליליות, והתומכים של f, g ו- $f*g$ סופיים אזי מתקיים

$$|support(f*g)|=|support(f)|+|support(g)|$$

- משפט הקונבולוציה - $f,g\in G(\mathbb{R})$ אזי,

$$\mathcal{F}[f*g]=2\pi\cdot\mathcal{F}[f](w)\cdot\mathcal{F}[f](w)$$

- משפט קונבולוציה (דואלי) - $f,\mathcal{F}[f],g,\mathcal{F}[g]\in G(\mathbb{R})$ אזי,

$$\mathcal{F}[f\cdot g]=\mathcal{F}[f](w)*\mathcal{F}[g](w)$$

1. פתור:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)f(t-z)dz = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

פתרון: מדובר במשואת קונבולוציה , כלומר : $f(x) * f(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. נבצע התמרת פוריה על שני אגפי המשואה ונקבל :

$$2\pi F^2(w) = \mathcal{F}\Big[e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]$$

נזכור ש:

$$e^{-t^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-(\frac{t}{\sqrt{2}})^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{2}w)^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

ולכן :

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad 2\pi F^2(w) = \mathcal{F}\Big[e^{-\frac{t^2}{2}}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \\
&\Longrightarrow \quad F^2(w) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{w^2}{2}} \\
&\Longrightarrow \quad F(w) = \pm \frac{1}{(2\pi)^{3/4}} e^{-\frac{w^2}{4}} \\
&\Longrightarrow \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\pm \frac{1}{(2\pi)^{3/4}} e^{-\frac{w^2}{4}}\Big] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\pm \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}}\Big] = \pm \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-t^2}
\end{aligned}$$

2. פתור:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)}{(t-z)^2+4}\, dz = \frac{1}{t^2+16}$$

פתרון: נגדיר $g(t) = \frac{1}{t^2+4}$, ולכן נתון ש: $h(t) * g(t) = \frac{1}{t^2+16}$. נזכור ש:

$$e^{-|t|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{\pi(1+w^2)}$$

$$0 < a \in \mathbb{R} \quad e^{-a|t|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{\pi(1+(\frac{w}{a})^2)} = \frac{a}{\pi(w^2+a^2)}$$

$$0 < a \in \mathbb{R} \quad \frac{\pi}{a} e^{-a|t|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{w^2+a^2}$$

$$\frac{1}{t^2+a^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{a} e^{-a|w|} = \frac{1}{2a} e^{-a|w|}$$

נבצע התמרת פוריה על שני אגפי המשואה ונקבל :

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathcal{F}\Big[h(t)\Big]\cdot\mathcal{F}\Big[\frac{1}{t^2+4}\Big] = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{t^2+16}\Big] \\
&\Longrightarrow \quad 2\pi H(w)\cdot\frac{1}{4} e^{-2|w|} = \frac{1}{8} e^{-4|w|} \\
&\Longrightarrow H(w) = \frac{1}{4\pi} e^{-2|w|} \\
&\Longrightarrow \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{4\pi} e^{-2|w|}\Big] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+4}
\end{aligned}$$

3. פתור:

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u> זוהי משואת אוילר ובד"כ פותרים בעזרת טורים . נסמן $Y(w) = \mathcal{F}[y]$ ונקבל :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y''] &= (iw)^2 Y(w) = -w^2 Y(w) \\ \mathcal{F}[xy'] &= i\frac{d}{dw}\Big(iwY(w)\Big) \\ &= -\frac{d}{dw}\Big(wY(w)\Big) \\ &= -Y(w) - wY'(w)\Big) \end{aligned}$$

נבצע התמרת פוריה על שני אגפי המשואה ונקבל :

$$-w^2 Y(w) - Y(w) - wY'(w) + Y(w) = 0$$

וקיבלנו משואה דיפנציאלית פרידה במישור w :

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad wY' + w^2 Y = 0 \\ &\Longrightarrow \quad Y(w) = \hat{C} \cdot e^{-\frac{w^2}{2}} \end{aligned}$$

נזכור ש:

$$\hat{C}e^{-a^2x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\hat{C}}{|a|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a^2}}$$

$$\hat{C}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\hat{C}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2}} \qquad \Longleftarrow \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ועבור

$$\underbrace{\sqrt{2\pi}\hat{C}}_{c} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{C} \cdot e^{-\frac{w^2}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

נציב תנאי התחלה כדי לקבוע את הקבוע c :

$$\begin{aligned} &y'(x) = -cxe^{-\frac{x^2}{2}} \\ &y''(x) = -cxe^{-\frac{x^2}{2}} + cx^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &y(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad y(0) = ce^{-\frac{0}{2}} = 1 \quad \Longrightarrow c = 1 \\ &y'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{נכון לכל } x \end{aligned}$$

ובסה"כ נקבל : $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. פתור את המשוואה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = f(x) & 0 < t < \infty \end{cases}$$

וכאשר $. \ f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ |x| \le 2 \\ 0 & ; \ \text{אח'} \end{cases}$

<u>פתרון:</u> זוהי משוואת החום . נבצע התמרת פוריה לפי x של $u(x,t)$, ונקבל :

$$U(w,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{iwx}dx$$

המשוואה הדפרנציאלית נראית : $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ואם נבצע התמרת פוריה של המשוואה נקבל :

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \dot{U} = 4(iw)^2 U \\ &\Longrightarrow \quad \dot{U} + 4w^2 U = 0 \\ &\Longrightarrow \quad U(w,t) = A(w)e^{-4w^2 t} \end{aligned}$$

נחשב את $A(w)$ לפי תנאי התחלה :

$$\begin{aligned} A(w) &= U(w,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} 1\cdot e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{-iw2}-e^{iw2}}{-iw} = \frac{\sin 2w}{\pi w} \end{aligned}$$

נחשב את $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4w^2 t}\right]$:

נדרוש: $ce^{-(ax)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{c}{|a|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{w^2}{4a^2}} = e^{-4w^2 t}$

ולכן: $\frac{1}{4a^2} = 4t \Longrightarrow a = \frac{1}{4\sqrt{t}}$

ולכן: $\frac{c4\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} = 1 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{16t}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-4w^2 t}$$

לסיכום :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{16t}} &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-4w^2 t} \\ f(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin 2w}{\pi w} \end{aligned}$$

ולפי משפט הקונבולוציה נקבל :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{\sin 2w}{\pi w}\cdot e^{-4w^2t}\Big\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{\sin 2w}{\pi w}\Big\}\cdot\mathcal{F}^{-1}\Big\{e^{-4w^2t}\Big\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(f(x)*\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{16t}}\Big)(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}}dy\\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}}dy=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-2}^{2}e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}}dy
\end{aligned}$$

ובסה"כ קיבלנו : $u(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-2}^{2}e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}}dy$.

5. נגדיר את הפונקציות :

$$f_a(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{a} & ;\ |x|\le a\\ 0 & ;\ \text{אח'}\end{cases}\qquad g_b(x)=\begin{cases}1 & ;\ |x|\le b\\ 0 & ;\ \text{אח'}\end{cases}$$

(א) מצא התמרות פוריה של כל אחת מהפונקציות .

(ב) מצא את כל הערכים הממשיים c שעבורם :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{ax}{2})}{x^2}\cdot\frac{\sin bx}{x}\cdot\cos cx\,dx=0$$

<u>פתרון:</u>

(א) נחשב התמרת פוריה של g_b ו- f_a :

$$\begin{aligned}
G_b(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}e^{-iwx}dx=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big]_{-b}^{b}=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-iwb}-e^{iwb}}{-iw}\Big]=\frac{\sin bw}{\pi w}\\
F_a(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}f_a(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{0}^{a}\Big(1-\frac{x}{a}\Big)\cos wx dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\sin wx}{w}-\frac{1}{a}\Big(\frac{x\sin wx}{w}+\frac{\cos wx}{w^2}\Big)\Big]_0^a=\\
&= -\frac{\cos wa}{\pi a w^2}+\frac{1}{\pi a w^2}=\frac{2\sin^2\frac{a}{2}w}{\pi a w^2}=\frac{\sin^2\frac{a}{2}w}{\pi(\frac{a}{2})w^2}
\end{aligned}$$

נשים לב כי את f_a ניתן לקבל כקונבולוציה ולכן נחשב אחרת :

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot g_{\frac{a}{2}}(x) * g_{\frac{a}{2}}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad F_a(w) = \frac{1}{a} \cdot 2\pi \cdot G_{\frac{a}{2}} \cdot G_{\frac{a}{2}} = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}w}{\pi w} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}w}{\pi w} = \frac{\sin^2 \frac{a}{2}w}{\pi(\frac{a}{2})w^2}$$

(ב) נתייחס למשואה כאל התמרה הפוכה ונשתמש בזוגיות הפונקציה ובקונבולוציה :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin^2(\frac{ax}{2})}{x^2} \cdot \frac{\sin bx}{x}}_{\text{זוגית}} \cdot \cos cx \; dx = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{ax}{2})}{x^2} \cdot \frac{\sin bx}{x} \cdot e^{icx} \; dx = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{aw}{2})}{\pi(\frac{a}{2})w^2} \cdot \frac{\sin bw}{w} \cdot e^{icw} \; dw = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} F_a(w) \cdot G_b(w) \cdot e^{icw} \; dw = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{F}^{-1}\Big[F_a(w) \cdot G_b(w)\Big](c) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{2\pi}\Big[f_a * g_b\Big](c) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & |c| \geq a + b
\end{aligned}$$

תרגיל 12 - התמרת לפלס, הגדרה ותכונות

הגדרות

- $\Lambda(\mathbb{R})$ - מרחב הפונקציות $f(t)$ המקיימות:
  1. $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומקיימת $f(t)=0$ לכל $t<0$.
  2. $\int_0^M |f(t)|dt<\infty$ לכל $0<M<\infty$.
  3. קיימים $K>0$ ו- $a\in\mathbb{R}$ כך ש- $|f(t)|<Ke^{at}$ לכל $t>0$.
- $f\in\Lambda(\mathbb{R})$, התמרת לפלס f - נתונה ע"י $F(s)=\mathcal{L}[f](s)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$.

משפטים

- $f\in\Lambda(\mathbb{R})$ ותהי $F(s)$ התמרת פורייה של $f(t)$. אזי,
  1. $F(s)$ מוגדרת לכל $s>a$.
  2. F רציפה בתחום הגדרתה .
  3. $\lim_{s\to\infty}F(s)=0$.

תכונות

- ליניאריות - $f,g\in\Lambda(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ $\qquad \mathcal{L}[\alpha f+\beta g](s)=\alpha\mathcal{L}[f](s)+\beta\mathcal{L}[g](s)$
- הזזה ומתיחה - $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0,b\geq 0$ $\qquad \mathcal{L}[f(ax-b)](x)=\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{-bs}{a}}\cdot\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$
- כפל באקספוננט - $b\in\mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{L}[e^{bt}\cdot f(t)](s)=\mathcal{L}[f](s-b)$
- נגזרת - $f(t),f'(t)\in\Lambda(\mathbb{R})$ $\qquad \mathcal{L}[f'(t)](s)=s\mathcal{L}[f](s)-f(0)$
- נגזרת מסדר n - $f^{(k)}(x)\in\Lambda(\mathbb{R})$ לכל $0\leq k\leq n$
  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s)=s^n\mathcal{L}[f](s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
- מומנט - $f(t),tf(t)\in\Lambda(\mathbb{R})$ $\qquad \mathcal{L}[tf(t)](s)=-\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[f](s)\right)$
- מומנט מסדר n - $x^kf(x)\in\Lambda(\mathbb{R})$ לכל $0\leq k\leq n$ $\qquad \mathcal{L}[t^nf(t)](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f](s)\right)$
- חלוקה ב- t - $f(t),\frac{f(t)}{t}\in\Lambda(\mathbb{R})$ $\qquad \mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}](s)=\int_s^\infty\mathcal{L}[f](x)dx$

Pierre Simon Laplace
1749-1827

1. אם $f(t)$ היא פונקציה מסדר אקספוננציאלי , מוגדרת עבור $t \geq 0$, רציפה ו־

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את התמרת לפלס של:

(א) $f(at)$, a קבוע .

(ב) $e^{at}f(t)$

(ג) $u(t-t_0)f(t-t_0)$, t_0 קבוע חיובי.

(ד) $u(t)$

(ה) $t^n f(t)$

(ו) t^n

(ז) $\sin at$

(ח) $\cos at$

(ט) $$g(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & ; \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

(י) $e^{-t}\cos 2t$

(יא) $e^{-4t}\cosh 2t$

(יב) $$g(t) = \int_0^t (u^2 - u + e^{-u})du$$

(יג) $t^n \sin t$

<u>פתרון:</u>

(א) זוהי תכונת ה־$scale$ של התמרת לפלס , כלומר :

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\Big(\frac{s}{a}\Big) \quad , \quad a > 0 \ \text{קבוע}$$

(ב) זוהי תכונת ה־$modulation$ של התמרת לפלס , כלומר :

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$$

(ג) זוהי תכונת ה־$shift$ של התמרת לפלס , כלומר :

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f](s)$$

(ד) זוהי התמרת לפלס של מדרגה , ונחשב לפי ההגדרה :

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \Big[-\frac{e^{-st}}{s}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

(ה) זוהי תכונת המומנט של התמרת לפלס , כלומר :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)$$

(ו) ניתן לחשב ישירות עפ"י ההגדרה או ע"י תכונת המומנט עבור הפונקציה "1" :

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(ז) ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל :

$$\mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

(ח) ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל :

$$\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

(ט) נשתמש בליניאריות התמרת לפלס ובהתמרה של מדרגה :

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \mathcal{L}[u_0(t) - u_T(t)](s) = \mathcal{L}[u_0(t)](s) - \mathcal{L}[u_T(t)](s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$$

(י) מהתמרת לפלס של $\cos 2t$ ומודולציה :

$$\mathcal{L}[\cos 2t](s) = \frac{s}{s^2+4} \implies \mathcal{L}[e^{-t}\cos 2t](s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

(יא) מליניאריות ההתמרה נקבל :

$$\mathcal{L}[e^{-4t}\cosh 2t](s) = \mathcal{L}\Big[e^{-4t}\cdot\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\Big](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\Big[e^{-2t}+e^{-6t}\Big](s) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+6}\Big]$$

(יב) ניתן לחשב ישירות:

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t \big(u^2-u-e^{-u}\big)du\Big](s) = \mathcal{L}\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+e^{-t}-1\Big](s) = \frac{3!}{3s^4}-\frac{2!}{2s^3}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$$

או לשים לב שמדובר בקונבולוציה עם "1" :

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t \big(u^2-u-e^{-u}\big)du\Big](s) = \frac{1}{s}\Big[\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s+1}\Big]$$

(יג) שוב מדובר בתכונת המומנט של התמרת לפלס , כלומר :

$$\mathcal{L}[t^n \sin t](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

2. תהא $f(t)$ מחזורית במחזור p . מצא את $\mathcal{L}[f](s)$.
<u>פתרון:</u> מהנתון $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+p) = f(t)$, ולפי ההגדרה נקבל :

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \\
&= \int_0^p f(t)e^{-st}dt + \int_p^{2p} f(t)e^{-st}dt + \int_{2p}^{3p} f(t)e^{-st}dt + \ldots\ldots = \\
&= \int_0^p f(z)e^{-sz}dz + \int_0^p f(z+p)e^{-s(z+p)}dz + \int_0^p f(z+2p)e^{-s(z+2p)}dz + \ldots\ldots = \\
&= \int_0^p f(t)e^{-st}dt + e^{-sp}\int_0^p f(t)e^{-st}dt + e^{-2sp}\int_0^p f(t)e^{-st}dt + \ldots\ldots = \\
&= \int_0^p f(t)e^{-st}dt \cdot \Big[1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + e^{-3sp} + \ldots\ldots\Big] = \\
&= \frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^p f(t)e^{-st}dt
\end{aligned}$$

3. חשב בעזרת התמרת לפלס $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\ dt$.

<u>פתרון:</u> נגדיר $F(s) = \int_0^\infty te^{-st}\cos t\ dt$, ולכן אנו מעוניינים בערך $F(2) = \int_0^\infty te^{-2t}\cos t\ dt$.
$F(s)$ היא התמרת לפלס של $t\cos t$ עפ"י ההגדרה ולכן נקבל :

$$F(s) = \int_0^\infty te^{-st}\cos t\ dt = -\Big(\frac{s}{s^2+1}\Big)' = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \implies F(2) = \frac{3}{25}$$

4. מצא התמרת לפלס של $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.
<u>פתרון:</u> נשתמש בתכונת המומנט ונקבל :

$$\begin{aligned}
f(t) = \frac{\sin t}{t} \quad &\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(s) \\
tf(t) = \sin t \quad &\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad -F'(s) = \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

לכן כדי למצוא את $F(s)$ נצטרך לפתור את המשוואה $-F'(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$.

<u>דרך 1:</u> ע"י אינטגרציה לא מסוימת נקבל :

$$F(s) = -\int \frac{1}{u^2+1}\,du + K = -\arctan s + K$$

וכאשר את K ניתן לחשב ב־$s \to \infty$ כי $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$:

$$0 = \lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty}\Big[-\arctan s + K\Big] = -\frac{\pi}{2} + K \implies K = \frac{\pi}{2}$$

כלומר :

$$F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

<u>דרך 2:</u> ע"י אינטגרציה מסוימת נקבל :

$$F(s) = \int\limits_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du = \Big[\arctan u\Big]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

5. מצא התמרת לפלס של הפונקציה :

$$f(t) = \begin{cases} 2t-4 & ; \quad t>4 \\ t & ; \quad 0<t<4 \\ 0 & ; \quad t<0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u> נרשום את הפונקציה בעזרת פונקציות מדרגה :

$$f(t) = t\cdot\Big(u_0(t) - u_4(t)\Big) + (2t-4)\cdot u_4(t) = tu_0(t) + (t-4)u_4(t)$$

וכעת נקבל עפ"י ההגדרה :

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

תרגיל 13 - התמרת לפלס הפוכה, קונבולוציה

- $f,g \in \Lambda(\mathbb{R})$, הקונבולוציה של f ו- g נתונה ע"י $(f*g)(t)=\int_0^\infty f(y)g(x-y)dy$ לכל $t\in\mathbb{R}$.
- תכונות הקונבולוציה - לכל $f,g,h\in\Lambda(\mathbb{R})$,
  1. $(f*g)*h=f*(g*h)$.
  2. $f*g=g*f$.
  3. $f(x)*\delta(x)=\delta(x)*f(x)=f(x)$ ($\delta(x)$ היא פונקציית דלתא של דירק) .
- משפט הקונבולוציה - $f,g\in\Lambda(\mathbb{R})$ אזי,

$$\mathcal{L}[f*g](s)=\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[f](s)$$

- משפט ההתמרה ההפוכה - $f\in\Lambda(\mathbb{R})$, נניח שקיימות הנגזרות החד צדדיות $f'_+(t)$ ו- $f'_-(t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$, ותהי

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-zt}f(z)dz,\quad z\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(z)>a$$

אזי

$$\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{zt}F(z)dz,\quad s>a$$

1. חשב התמרת לפלס הפוכה עבור :

(א) $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}$.

(ב) $F(s) = \dfrac{3s^2}{(s^2+1)^2}$.

(ג) $F(s) = \ln(1+\dfrac{1}{s^2})$.

<u>פתרון:</u>

(א) נפרק לשברים חלקיים :

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{16}}{s+2} + \frac{\frac{1}{8}}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{1}{16}s}{s^2+4}$$

ולכן נקבל :

$$f(t) = \Big(\frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{8}te^{-2t} - \frac{1}{16}\cos 2t\Big)u(t)$$

(ב) נפרק לשברים חלקיים :

$$F(s) = \frac{3s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}(s^2-1)+\frac{3}{2}(s^2+1)}{(s^2+1)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

נזכור ש:

$$\begin{aligned} t\cos t &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)\Big(\frac{s}{s^2+1}\Big)' = -\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} \\ \sin t &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

ולכן נקבל :

$$f(t) = \frac{3}{2}\big(t\cos t + \sin t\big)u(t)$$

(ג) נשתמש בנגזרת של התמרה :

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \ln(1+\frac{1}{s^2}) \\ tf(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} -F'(s) = -\Big[\frac{s^2}{s^2+1}\cdot\frac{-2}{s^3}\Big] = \frac{2}{s(s^2+1)} \end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקיים נותן :

$$\frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+1}$$

ובסה"כ נקבל :

$$\begin{aligned} tf(t) &= 2 - 2\cos t \\ f(t) &= \frac{2}{t}\big(1-\cos t\big)u(t) \end{aligned}$$

2. מצא פונקציה $y(t)$ המוגדרת בקטע $[0,\infty]$ ומקיימת :

$$y''(t)+9y(t)=\begin{cases} 0 & ; \ 0\le t\le C \\ t-C & ; \ t>C \end{cases}$$

$$y(0)=A \ , \ \ y'(0)=B \ , \ \ A,B,C\in\mathbb{R}$$

<u>פתרון:</u> נבטא את המשוואה בעזרת פונקצית מדרגה ,

$$y''(t)+9y(t)=(t-C)u_C(t)$$

נבצע התמרת לפלס למשוואה ונקבל :

$$\begin{aligned} & s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+9Y(s)=\frac{e^{-Cs}}{s^2} \\ \Longrightarrow \quad & (s^2+9)Y(s)=As+B+\frac{e^{-Cs}}{s^2} \\ \Longrightarrow \quad & Y(s)=\frac{As}{s^2+9}+\frac{B}{s^2+9}+\frac{e^{-Cs}}{s^2(s^2+9)} \end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקיים נותן :

$$\Longrightarrow \quad Y(s)=\frac{As}{s^2+9}+\frac{B}{s^2+9}+e^{-Cs}\Big[\frac{\frac{1}{9}}{s^2}+\frac{-\frac{1}{9}}{s^2+9}\Big]$$

$$\Longrightarrow \quad y(t)=A\cos 3t+\frac{B}{3}\sin 3t+\frac{1}{9}u_C(t)(t-C)-\frac{1}{27}u_C(t)\sin\big(3(t-C)\big)$$

3. נגדיר : $f(t)=\int\limits_0^\infty \frac{u\sin tu}{1+u^2}\,du \quad t>0$.

(א) חשב את התמרת לפלס של $f(t)$.

(ב) חשב את f .

<u>פתרון:</u>

(א) לפי ההגדרה :

$$\begin{aligned} F(s) &= \int\limits_{t=0}^\infty\Big(\int\limits_{u=0}^\infty \frac{u\sin tu}{1+u^2}\,du\Big)e^{-st}dt \\ &= \int\limits_{t=0}^\infty\int\limits_{u=0}^\infty \frac{u\sin tu\ e^{-st}}{1+u^2}\,dudt \\ &= \int\limits_{u=0}^\infty \frac{u}{u^2+1}\Big[\int\limits_{t=0}^\infty \sin ut\ e^{-st}dt\Big]du \\ &= \int\limits_{u=0}^\infty \frac{u}{u^2+1}\cdot\frac{u}{s^2+u^2}\,du \end{aligned}$$

נפרק לשברים חלקיים את האיטגרנד :

$$\frac{u}{u^2+1}\cdot\frac{u}{s^2+u^2}=\Big(\frac{1}{1-s^2}\Big)\cdot\frac{1}{u^2+1}+\Big(\frac{s^2}{1-s^2}\Big)\cdot\frac{1}{u^2+s^2}$$

ולכן :

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{u=0}^{\infty} \Big[\big(\frac{1}{1-s^2}\big)\cdot\frac{1}{u^2+1} + \big(\frac{s^2}{1-s^2}\big)\cdot\frac{1}{u^2+s^2}\Big]du \\
&= \frac{1}{s^2-1}\int_{u=0}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du + \frac{s^2}{1-s^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+s^2}\,du \\
&= \frac{1}{s^2-1}\int_{u=0}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du + \frac{s^2}{1-s^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+s^2}\,du \\
&= \frac{1}{s^2-1}\int_{u=0}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du + \frac{s^2}{1-s^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2\big((\frac{u}{s})^2+1\big)}\,du \\
&= \frac{1}{s^2-1}\int_{u=0}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du + \frac{s}{1-s^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{(u^2+1)}\,du \\
&= \frac{1}{s+1}\int_{u=0}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{s+1}\Big[\arctan u\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

(ב) זוהי התמרה אלמנטרית : $f(t) = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-t} \;,\; t>0$.

4. חשב $f(t)$ אם נתון: $\begin{cases}\int_0^t f(z)dz - f'(t) = \sin t \\ f(0)=1\end{cases}$.

<u>פתרון:</u> נוכל לרשום את המשוואה כ:

$$\underbrace{\int_0^t f(z)u(t-z)dz}_{f(t)*u(t)} - f'(t) = \sin t$$

נבצע התמרת לפלס ונקבל :

$$\begin{aligned}
&\frac{F(s)}{s} - \big(sF(s)-f(0)\big) = \frac{1}{s^2+1} \\
\Longrightarrow\quad & F(s)\cdot\frac{1-s^2}{s} = \frac{1}{s^2+1} - 1 = -\frac{s^2}{1+s^2} \\
\Longrightarrow\quad & F(s) = \frac{s^3}{(s^2-1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקיים נותן :

$$F(s) = \frac{s^3}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{\frac{1}{4}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1}$$

ולכן נקבל :

$$f(t) = \Big(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t\Big)u(t) = \frac{1}{2}\big(\cosh t + \cos t\big)u(t)$$

5. נתון : $2\int\limits_0^t \sin 2z\, h(t-z)dz = h(t) - \sin^2 t$.

מצא את $h(t)$.

פתרון: מדובר במשוואת קונבולוציה , ונזכור ש :

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) \\ \sin 2t &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{s^2+4} \\ \sin^2 t = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+1)} \end{aligned}$$

נתמיר את המשוואה ע"י לפלס :

$$\begin{aligned} & 2\cdot\frac{2}{s^2+4}\cdot H(s) = H(s) - \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)} \\ \Longrightarrow\quad & H(s)\left[1 - \frac{4}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)} \\ \Longrightarrow\quad & H(s)\cdot\frac{s^2}{s^2+4} = \frac{4}{2s(s^2+4)} \\ \Longrightarrow\quad & H(s) = \frac{2}{s^3} \\ \Longrightarrow\quad & h(t) = t^2 u(t) \end{aligned}$$

6. פתור:
$$\begin{cases} \int\limits_0^t f'(u)f(t-u)du = 24t \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

וכאשר נתון : $\frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

פתרון: נוכל לרשום את המשוואה שלנו כמשוואת קונבולוציה :

$$f'(t) * f(t) = 24t$$

נתמיר לפלס ונקבל :

$$\begin{aligned} & \big(sF(s) - f(0)\big)\cdot F(s) = \frac{24}{s^2} \\ \Longrightarrow\quad & F^2(s) = \frac{24}{s^3} \\ \Longrightarrow\quad & F(s) = \pm\sqrt{24}\cdot s^{-\frac{3}{2}} \\ \Longrightarrow\quad & F(s) = \pm\sqrt{24}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

נשתמש במשפט הקונבולוציה כדי לקבל :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{t}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{s}} \\ u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \\ \pm\sqrt{24}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{t}} * u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \pm\sqrt{24}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

ולכן :

$$\begin{aligned} f(t) &= \pm\sqrt{\frac{24}{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{z}}u(t-z)dz = \\ &= \pm\sqrt{\frac{24}{\pi}}\int_0^t z^{-\frac{1}{2}}dz = \\ &= \pm\sqrt{\frac{24}{\pi}}\left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_0^t = \\ &= \pm 4\sqrt{\frac{24}{\pi}}\sqrt{t}\cdot u(t) \end{aligned}$$

או לחילופין ניתן לפתור לפי תכונת המומנט :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{t\pi}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{s}} \\ t\sqrt{\frac{1}{t\pi}} = \sqrt{\frac{t}{\pi}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \\ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ולכן :

$$\begin{aligned} f(t) &= \pm\sqrt{24}\cdot 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \\ &= \pm 4\sqrt{\frac{6t}{\pi}}\cdot u(t) \end{aligned}$$