<u>לינארית 1 תשובות תרגיל 2</u>

1. א. $\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix}1/3&2/3&2/3\\-2/3&-1/3&2/3\\2/3&-2/3&1/3\end{pmatrix}$

ג. אם a≠b וגם a≠0 אז $\frac{1}{a(a-b)}\begin{pmatrix}a&0&-b\\-a&a&0\\0&-a&a\end{pmatrix}$

אחרת המטריצה לא הפיכה.

2. א. למשל $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$

ב. נכפול במטריצה ההפכית משמאל: $AB = AC \ \backslash A^{-1}$

$B = IB = IC = C$

ג. למשל : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

ד. למשל: $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

ה. $\Leftarrow$ AB סימטרית ולכן $AB = (AB)^t = B^tA^t = BA$

$\Rightarrow$ A, B מתחלפות ולכן: $AB = BA = B^tA^t = (AB)^t$

3. * לפי הגדרת השחלוף $(A)_{ii}=(A^t)_{ii}$ איברי האלכסונים שווים ולכן $tr(A)=tr(A^t)$.

* $trA = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad , \quad trB = \sum_{i=1}^n b_{ii}$

$$trA + trB = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = tr(A+B) \quad \Longrightarrow$$

* דוגמא נגדית A=B=I $\quad tr(AB) = tr(I) = n \neq n^2 = tr(I)tr(I) = tr(A)tr(B)$

* $\alpha tr(A) = \alpha\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} = tr(\alpha A)$

* דוגמא נגדית A=I $\quad tr(I^{-1}) = trI = n \neq \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{tr(I)}}$

4. א. $AA^3 = A^3A = A^2A^2 = (-I)(-I) = I \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = A^3$

ב. לא נכון לפי יחידות המטריצה ההופכית. אפשר גם דוג' נגדית: $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

ג. לא נכון לפי א

5. צד א': נניח ש W תת מרחב וקטורי של V אז

$$0_V \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$$

לכן התנאי הראשון מתקיים.
כמו כן, אם $u, v \in W$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$ אז בגלל ש W מרחב וקטורי $\alpha v \in W$ (כי W סגור לכפל בסקלר) ו $u + \alpha v \in W$ (כי W סגור לחיבור) ולכן גם התנאי השני מתקיים
צד ב': נניח שהתנאי מתקיים ונוכיח ש W תת מרחב.
צריך להוכיח ש W מקיים שלוש תכונות

- $W \neq \emptyset$
- $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
- $u \in W, \quad \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha u \in W$

ברור ש $W \neq \emptyset$ זו הרי אחת הדרישות שלנו.
אם $u, v \in W$ אז לפי הנתון אפשר לבחור $\alpha = 1_V \in \mathbb{F}$ ומתקיים

$$u + \alpha v \in W \Rightarrow u + 1_V v \in W \Rightarrow u + v \in W$$

שזו התכונה השנייה שרצינו.
היות ונתון כי $W \neq \emptyset$ קיים $w \in W$ ניתן לבחור $\alpha = -1_V \in \mathbb{F}$ ולקבל

$$w + \alpha w \in W \Rightarrow w - 1_V w \in W \Rightarrow 0_V \in W$$

אם $u \in W, \quad \alpha \in \mathbb{F}$ אז

$$0_V + \alpha u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$$

שזו התכונה השלישית שרצינו להוכיח ולכן W תת מרחב וקטורי.

6. במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$ ניקח

$$U = span(\{(1,1)\}), \quad V = span(\{(1,0)\}), \quad W = span(\{(0,1)\})$$

ואז

$$V + W = \mathbb{R}^2, \quad U \cap (V + W) = U = span(\{(1,1)\})$$

$$U \cap V = U \cap W = \{(0,0)\}$$

ולכן

$$U \cap (V + W) = span(\{(1,1)\}) \supsetneq \{(0,0)\} = U \cap V + U \cap W$$

זה מהווה סתירה לא' ו ג'.
אם

$$U = V = W = \{(0,0)\}$$

אז

$$U \cap (V + W) = \{(0,0)\} = U \cap V + U \cap W$$

וזה מהווה סתירה לב'.

את ד' נוכיח.

אם $x \in U\cap V + U\cap W$ אז

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in U\cap V, \quad x_2 \in U\cap W$$

היות ו

$$x_1 \in U, \quad x_2 \in U$$

ובגלל ש U סגור לחיבור

$$x_1 + x_2 = x \in U$$

כמו כן, היות ו

$$x_1 \in V, \quad x_2 \in W$$

מתקיים ש

$$x_1 + x_2 = x \in V + W$$

ולכן

$$x \in U \cap (V+W)$$

שזה באמת מוכיח

$$U\cap V + U\cap W \subseteq U\cap(V+W)$$

7. (א) נכון.

אם $x \in U + W$ אז

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in U, \quad x_2 \in W$$

לפי חוק החילוף

$$x = x_2 + x_1, \quad x_1 \in U, \quad x_2 \in W$$

שזה בדיוק אומר

$$x \in W + U$$

ולכן

$$U + W \subseteq W + U$$

באופן דומה מוכיחים

$$U + W \supseteq W + U$$

ולכן

$$U + W = W + U$$

(ב) נכון.

אם $x \in (U+W)+V$ אז

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in U + W, \quad x_2 \in V$$

היות ו $x_1 \in U + W$ ניתן לכתוב

$$x_1 = x_3 + x_4, \quad x_3 \in U, \quad x_4 \in W$$

ולכן

$$x = (x_3 + x_4) + x_2, \quad x_3 \in U, \quad x_4 \in W, \quad x_2 \in V$$

לפי חוק הקיבוץ

$$x = x_3 + (x_4 + x_2), \quad x_3 \in U, \quad x_4 \in W, \quad x_2 \in V$$

לכן

$$x = x_3 + (x_4 + x_2), \quad x_3 \in U, \quad x_4 + x_2 \in W + V$$

כלומר

$$x \in U + (W + V)$$

לכן

$$(U + W) + V \subseteq U + (W + V)$$

בדרך דומה מוכיחים

$$(U + W) + V \supseteq U + (W + V)$$

ולכן

$$(U + W) + V = U + (W + V)$$

$$x \in W + U$$

ולכן

$$U + W \subseteq W + U$$

באופן דומה מוכיחים

$$U + W \supseteq W + U$$

ולכן

$$U + W = W + U$$

(ג) לא נכון.
אם

$$U = span(\{(1,0)\}), \quad V = span(\{(1,1)\}), \quad W = span(\{(0,1)\})$$

אז

$$U \oplus V = \mathbb{R}^2 = U \oplus W$$

אבל

$$V \neq W$$