אלגברה לינארית – תרגיל 4

שאלה 1

יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ ויהיו $W,U\subseteq V$ תתי מרחב:

$$U=span\left\{1-x,x^2,x^2-x^3,-1+x-x^2+2x^3\right\},W=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\middle|\begin{array}{c}p(1)=0\wedge\\ p(2)+p(0)=0\end{array}\right\}$$

מצא בסיס ומימד של תתי המרחבים הבאים:

א. U

ב. W

ג. $U+W$

ד. $U\cap W$

שאלה 2

א. יהיו $v_1=(1,0,1,0),v_2=(0,2,1,1),v_3=(1,2,1,2)$ ויהיה $u=(x,y,z,w)$. מצא תנאים על x,y,z,w (מערכת משוואות לינאריות) כך ש u יהיה שייך ל Span של v_1,v_2,v_3.

ב. פתור את מערכת המשוואות שמצאת בסעיף א' על מנת לקבל וקטור כללי ב $Span\{v_1,v_2,v_3\}$ (הוא וקטור הפתרון הכללי כמובן).

ג. מצא מערכת משוואות דומה לסעיף א' עבור
$$w_1=(1,1,0,0),w_2=(0,1,1,0),w_3=(0,0,1,1)$$

ד. נסמן $V=span\left\{v_1,v_2,v_3\right\},W=span\left\{w_1,w_2,w_3\right\}$ עבור הוקטורים מהסעיפים הקודמים. הוכח: $u\in V\cap W$ אם"ם u מקיים את מערכת המשוואות שמכילה את כל המשוואות מסעיף א' **וגם** מסעיף ג'.

ה. מצא בסיס ל $V\cap W$ באמצעות פתרון המערכת מהסעיף הקודם.

הערה: התרגיל הזה הוא כמובן דוגמא פרטית לאלגוריתם כללי לחשב בסיס לחיתוך.

שאלה 3

יהי $\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה קטנה או שווה ל3. יהיו בסיסים סדורים

$B=\{1,1+x,1+x^2,1+x^3\},C=\{1+x,1-x,x^2-x^3,x^2+x^3\}$ (הסדר משמאל לימין)

א. מצא את $p(0)$ אם נתון $[p]_B=\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ -2a \end{pmatrix}$

ב. מצא את $\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_C,\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_B$

ג. מצא את $\left[1+x^2\right]_C$

ד. מצא את מטריצות המעבר $[I]_C^B,[I]_B^C$

שאלה 4

יהי V מ"ו ויהיו $U,W\subseteq V$ נניח $U\cap W=\{0\}$ ונניח $\dim U+\dim W=\dim V$.

הוכח/הפרך: $U\oplus W=V$

שאלה 5

יהיו $U_1,U_2,U_3\subseteq V$ תתי מרחבים המקיימים $\dim U_2<\dim U_3$ וגם $U_1+U_2=U_1+U_3$

האם $\dim(U_1\cap U_2)$ קטן גדול או שווה ל $\dim(U_1\cap U_3)$

שאלה 6

תהיינה $A,B\in F^{n\times n}$ מטריצות כך ש $C(B)\cap N(A)=\{0\}$.

הוכיחו כי $rank(B)\le rank(A)$

שאלה 7

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $rank(A)=rank(B)=2$. הוכיחו כי $A\cdot B\neq 0$.