תרגול 8־9

13 ביוני 2016

תזכורת

מרחבים וקטורים

הגדרה: מרחב וקטורי הוא מבנה הכולל קבוצה V עם פעולת חיבור ושדה $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל שלו. בנוסף, קיים כפל המקשר בין איברי Vלאיברי $\mathbb{F}$(כפל בסקלאר). האקסיומות שמרחב וקטורי צריך לקיים:

1. אקסיומות של החיבור ב V. לכל $v, w, u \in V$ מתקיים
   (א) מוגדרות $v + w \in V$.
   (ב) קיבוץ $v + (u + w) = (v + u) + w$.
   (ג) חילוף $v + u = u + v$.
   (ד) איבר נטרלי $\exists 0 \in V : \forall v \in V : 0 + v = v$.
   (ה) איבר נגדי $\forall v \in V\, \exists(-v) \in V : v + (-v) = 0$.
2. אקסיומות של כפל וחיבור של שדה ־בהגדרת שדה
3. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $v, u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha v \in V$
   (ב) קיבוץ $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
   (ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{F}} v = v$
   (ד) פילוג
      i. $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$
      ii. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

דוגמא $\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \mid x, y, z, \in \mathbb{R}\}$ עם חיבור $(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ וכפל בסקלאר $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x, y, z) = (\alpha z, \alpha y, \alpha z)$ הוא מרחב וקטורי.

תתי מרחבים

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ יקרא תת מרחב אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות V .

הערה: כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק

1. $w, u \in W$ מתקיים
   (א) מוגדרות $u + w \in W$.
   (ב) איבר נטרלי 0 של Vנמצא ב־W
2. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha w \in W$

את שאר האקסיומות W יורש מ V כתת קבוצה.

הערה: ניתן לרכז את הבדיקות הנ"ל מספיק לבדוק

1. $W \neq \emptyset$
2. שלכל $w, u \in W,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha u + w \in W$.

צירופים לינארית ותלות לינארית

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \dots, v_n \in V$ ו $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ אזי ביטוי מהצורה $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$ נקרא צירוף לינארי (צ"ל).

לדוגמא: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. אזי $\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sqrt{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי.

הערה: אם ניקח כל $\alpha_i = 0$נקבל $0v_1 + 0v_2 + \cdots 0v_n = 0$. צ"ל זה נקרא טרוויאלי.

הגדרה: בסימונים הקודמים אם קיים צ"ל לא טריוואלי כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0$ אזי נאמר ש $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ תלויה לינארית (ת"ל). אחרת, אם הצ"ל הטריוולאי היחידי ששווה ל־0 אזי נאמר ש $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ בלתי תלויה לינארית (בת"ל).

במילים אחרות אם $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0$ גורר שכל $\alpha_i = 0$ אזי $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל

דוגמאות

1. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$בת"ל
   כי $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

פירושו $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ שזה גורר $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$.

2. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

נתבונן ב $0 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ונמיר אותו להצגה מטריצית $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}_{n \times 1} = b_{1j}\vec{a_1} + $$

$$b_{2j}\vec{a_2} + \cdots + b_{nj}\vec{a_n} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{a_k} \in \mathbb{F}^{m \times 1}$$

כעת השאלה שקולה האם יש פתרון לא טריאלי למערכת. נדרג ונבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $z = t$ ונקבל $t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ פתרון לא טרוויאלי. כלומר הוקטורים הנ"ל ת"ל.

3. יהי $0 \neq v \in V$ אזי $\{v\}$קבוצה בת"ל.

4. יהי $S = \{v_1 \dots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל.

5. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים עד דרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.
תהא $S = \{2 + 6x, x^2, 1 + 2x + 2x^2\}$.
האם $1 + x + x^2$ הוא צ"ל של איברי S?
פתרון: צריך למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
כך ש $\alpha_1(2 + 6x) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(1 + 2x + 2x^2) = 1 + 1x + x^2$
כלומר לפי השוואת מקדמים : $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1,\ 6\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$
ובצורה מטריצית $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. נבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

כלומר $-0.5(2+6x)+(-3)x^2+2(1+2x+2x^2)=1+1x+x^2$.

6. יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S=\{v_1,\dots v_n\}$ קבוצה בת"ל. הוכח $S'=\{v_1,w_2,\dots w_n\}$ בת"ל כאשר $w_i=v_i+v_1$.
פתרון: נניח $\alpha_1v_1+\alpha_2w_2+\cdots\alpha_nw_n=0$ צ"ל $\alpha_i=0$.
$$0=\alpha_1v_1+\alpha_2w_2+\cdots\alpha_nw_n=\alpha_1v_1+\alpha_2(v_1+v_2)+\cdots\alpha_n(v_1+v_n)$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n$$
כיוון ש $S=\{v_1,\dots v_n\}$ בת"ל גורר ש $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=0,\ \alpha_2=0\dots\alpha_n=0$
$\Leftarrow \alpha_1=0,\ \alpha_2=0\dots\alpha_n=0 \Leftarrow$ S' בת"ל

ד

המרחב הנפרש (span)

הקדמה/מוטיבציה: ראינו בשיעור קודם ש $S=\{(x,y)\,|\,x,y\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$ אינו תת מרחב.
אנו רוצים להוסיף ל S וקטורים כך שהקבוצה החדשה $S\subset W$ תהיה תת מרחב.
עפ"י הגדרת תת מרחב ברור כי Wמכילה את כל הצ"ל של איברי S כי $S\subset W$ ו W סגור לחיבור וכפל בסקאר.
לכן מגדירים:
הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2\dots,v_n\in V$
אזי $span(\{v_1,v_2\dots,v_n\})=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n\,|\,\alpha_i\in\mathbb{F}\}$
ובאופן כללי $\emptyset\neq S\subset V$ אזי $span(S)=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n\,|\,\alpha_i\in\mathbb{F},v_i\in S\}$.
אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

דוגמא $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $S=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ ננסה להבין מבחינה גאומטרית
מהו תת המרחב $span(S)$?

פתרון : $span(S)=\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

כלומר מישור xy בתוך המרחב.
משפט: בסימונים לעיל $span(S)\subset V$ הינו תת מרחב שמכיל את S. והוא הכי קטן (כלומר אם $S\subset W$ אזי $W\subset span(S)$).
תרגיל: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $S=\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\}$

1. האם $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in span(S)$?
2. מהו $span(S)$? (מבחינה גאומטרית)

פיתרון:

1. האם $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in span(S)$?

נבדוק האם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

כך ש $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$?

שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\1&3&2&0\end{array}\right)$ קיים פתרון?

נבדוק $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\1&3&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\0&1&4&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&3\\0&1&4&-1\end{array}\right)$

יש פתרון למערכת לדוגמא (אם נבחר שרירותית $\alpha_3=0$) $\alpha_1=3,\alpha_2=-1$

ואכן $3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2. מהו $span(S)$?

באופן דומה נבדוק אלו וקטורים $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in span(S)$

נבדוק תחת אלו תנאים על a,b קיימים a_1,a_2,a_3 כך ש-

$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

נדרג את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&a\\1&3&2&b\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&a\\1&3&2&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&a\\0&1&4&b-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&3a-2b\\0&1&4&b-a\end{array}\right)$

פיתרון כללי: $a_3=t,\ a_1=3a-2b+10t,\ a_2=b-a-4t$.

ואכן עבור $t=0$ מתקיים: $(3a-2b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(b-a)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

כלומר $span(S)=\mathbb{R}^2=V$ (כל וקטור ב-$\mathbb{R}^2$ ניתן לייצג כצירוף לינארי של וקטורים מ-S)

הערה: בפרט $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\in span(\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\})$ ולכן S ת"ל.

ובנוסף, $span(S)=span(\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\})$.

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

$S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$ והאם S בת"ל ?

פתרון רוצים למצוא את כל המטריצות $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

נייצג כל מטריצה באמצעות וקטור. למשל $\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}$

כעת השאלה שקולה ל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ולכן, כמו קודם נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 3 & 1 & d-b \\ 0 & 2 & 2 & a-b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b-\frac{d-b-3c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & c+\frac{d-b-3c}{2} \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right)$$

אם נבחר $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ רואים כי חייבים לקחת $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$ ולכן S בת"ל

בנוסף רק אם $a-b-2c=0$ יש פתרון למערכת ולכן

$$span(S) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b-2c=0\} = \{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\} =$$

$$\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= span\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

הגדרה: אם $span\,(S) = V$ נאמר ש־S פורשת את המרחב V.

דוגמאות:

$V = \mathbb{R}^3$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

הקבוצה $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את V. כי כל וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$

$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ אינו פורש את V כמו שראינו בתרגיל $span\,(S) \neq V$ (לדוגמה הוקטור $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ אינו נמצא בקבוצה הנפרשת על ידי S)

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל
נניח שקיים $v \in V \backslash span(S)$. הוכח: $S^{'} = \{v_1, \dots v_n, v\}$ בת"ל.

הוכחה: צריך להוכיח כי: $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\alpha_n v_n+\alpha v=0\to\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\alpha=0$

נניח כי $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\alpha_n v_n+\alpha v=0$

$\Leftarrow \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\alpha_n v_n=-\alpha v$

$\Leftarrow \alpha=0$ כי אחרת נקבל $\frac{\alpha_1}{-\alpha}v_1+\frac{\alpha_2}{-\alpha}v_2+\cdots\frac{\alpha_n}{-\alpha}v_n=v$ בסתירה לנתון ש- $v\notin span(S)$.

$\Leftarrow \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\alpha_n v_n=0 \Leftarrow \alpha_i=0$ כי S בת"ל.

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S=\{v_1,\ldots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.

אזי $span(S)=span(S^{'})$ כאשר $S^{'}=\{v_1,\ldots v_{n-1}\}$

פתרון: נראה הכלה דו כיוונית:

$\supseteq$: יהי $v\in span(S^{'})$ אזי קיימים $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}$ כך ש- $v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{n-1}v_{n-1}$ אולם $v_1,\ldots,v_{n-1}\in S$ ולכן $v\in span\,(S)$

$\subseteq$: יהי $v\in span(S)$ אזי קיימים $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1},\alpha_n$ כך ש- $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{n-1}v_{n-1}+\alpha_n v_n=v$

v_nת"ל ב- $v_1,\ldots,v_{n-1}$ ולכן קיימים $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$ כך ש- $\beta_1 v_1+\ldots+\beta_{n-1}v_{n-1}=v_n$

נציב את v_n במשוואה לעיל ונקבל

$\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{n-1}v_{n-1}+\beta_1 v_1+\ldots+\beta_{n-1}v_{n-1}=v$ לאחר כינוס איברים נקבל: $v=(\alpha_1+\beta_1)\,v_1+\ldots+(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})\,v_{n-1}$ ולכן $v\in span\,(S')$

בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B\subset V$ בת"ל כך ש $span(B)=V$ נקראת בסיס.

הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V=|B|$ כאשר B בסיס. V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V<\infty$

משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב כלומר לכל שתי בסיסים B,B' הגדלים שלהם שווים. $|B|=|B'|$.

משפט: יהיה $B\subset V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. Bבסיס
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית
3. B קבוצה פורשת את V- מינימאלית.

תרגיל: יהיה $V=\mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. מצא $dim_{\mathbb{F}}V$.

1. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$

   פתרון: קל לראות כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$קבוצה פורשת ובת"ל ולכן בסיס. $dim_{\mathbb{F}}V=2$

2. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

   פתרון: במקרה זה צריך יותר וקטורים לבסיס כי יש פחות סקלארים להשתמש בהם.

טענה: $B=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\}$ בסיס.

הוכחה: B פורשת: יהיה $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}\in V$ אזי

$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

B בת"ל. נניח $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$

$\Leftarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 i\\\alpha_3+\alpha_4 i\end{pmatrix}\Leftarrow \alpha_i=0$.

דוגמאות לבסיסים סטנדרטים:

1. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. בסיס $B=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$

2. $V=\mathbb{C}^{3\times 2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$בסיס

$$B=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$$

3. $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$. בסיס $B=\{1,x,x^2\}$

4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ בסיס $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\dots\}$ בסיס אינסופי.

משפט השלישי חינם

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n $(dim_{\mathbb{F}}V=n)$. תהא קבוצה $B\subset V$ אם Bמקיימת 2 מתוך 3 התנאים הבאים אזי היא מקיימת גם את השלישי (ובפרט Bתהיה בסיס).

1. $\#B=n$
2. B פורשת את V
3. B בת"ל

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהיו $B=\{v_1,v_2\}$כך ש $v_i\neq 0$ ו $v_1\neq\alpha v_2$ (כלומר v_1 אינו פרופורציונאלי ל v_2) אזי B בסיס ל V.

הוכחה: ראינו כי המימד של המרחב שווה 2. מהנתון נובע כי B בת"ל ובנוסף $\#B=2$ לכן ממשפט השלישי חינם Bבסיס.

דוגמא פרטית $B=\{\begin{pmatrix}\pi\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\-1\end{pmatrix}\}$ בסיס.

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. השלם את

$S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ לבסיס.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=4$ (קל לראות שקיים בסיס סטנדרטי מגודל 4) ראינו כי S בת"ל ולכן מספיק למצוא וקטור $v\notin span(S)$ ואז $S\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל (לפי אחד התרגילים שעשינו) מגודל 4 ולכן בסיס.

ראינו כי $span(S)=\{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\}$ ולכן $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin span(S)$.

תרגיל: $V=\mathbb{C}_2[x]$ מעל $\mathbb{C}$. $B=\{v_1=1+x, v_2=1+ix, v_3=ix, v_4=ix^2\}$ מצא $B' \subset B$ כך ש B'בסיס ל V.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=3$ מספיק למצוא 3 וקטורים ב B שהם בת"ל. נבדוק באופן כללי האם הווקטורים בת"ל.

שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון לא טרויאלי:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, כלמור הוקטורים ת"ל והפתרונות הם מהצורה: $\alpha_1=-\alpha_2,\ \alpha_2=\frac{-it}{i-1},\ \alpha_3=t,\ \alpha_4=0$. רואים שהוקטורים v_1,v_2,v_3 ת"ל אחד בשני לכן נוכל להשמיט אחד מהוקטורים התלויים לינארית ונבדוק האם יש עדיין תלות:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ רואיסם שאין תלות, לכן:

כלומר $B'=\{1+x, 1+ix, ix^2\}$ קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

הערות כלליות:

1. לכל קבוצה $B\subset V$ שפורשת את Vניתן למצוא $B'\subset B$ כך ש B' בסיס (לצמצם את B לבסיס)
2. לכל קבוצה $B\subset V$ בת"ל ניתן למצוא $B\subset B'$ כך ש B' בסיס (להרחיב את Bלבסיס)

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W\subset V$ תת מרחב מאותו מימד $(dim_{\mathbb{F}}V=dim_{\mathbb{F}}W=n)$. הוכח: $W=V$.

הוכחה: נבחר $B=\{w_1,\ldots,w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B)=W$ ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B)=V$.$\blacksquare$

תרגיל: היה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $B=\{v_1,\ldots v_n\}$ בסיס.
אזי כל וקטור $v\in V$. ניתן להצגה יחידה באיברי בסיס B.

פתרון: כיוון ש $span(B)=V$ ניתן לכתוב $v=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ נניח כי ניתן להציג את v גם כ $v=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ אזי $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ כלומר $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)v_i=0$
כיוון ש B בת"ל לכל i $\alpha_i-\beta_i=0$ כלומר לכל i $\alpha_i=\beta_i$ $\blacksquare$

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A,B\subset V$. אזי $A+B:=\{a+b\,|\,a\in A, b\in B\}$

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A,B\subset V$.

הוכח $span(A\cup B)=span(A)+span(B)$
הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $x\in span(A)+span(B)$ אזי $x=x_A+x_B$
כאשר $x_A\in span(A), x_B\in span(B)$.
לפי הגדרה $x_A=\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i a_i,\ x_B=\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i b_i$ כאשר α_i,β_i סקלארים ו $a_i\in A, b_i\in B$.
לכן $x=\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i a_i+\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i b_i$ כלומר צ"ל של איברים מ $A\cup B$ ולכן $x\in span(A\cup B)$.
$(\subseteq)$יהא $x\in span(A\cup B)$ אזי $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ כאשר $v_i\in A\cup B$. כלומר
לכל i מתקיים $v_i\in A$ או $v_i\in B$
נסדר ע"י החלפת אינדקסים את כל $v_i\in A$בהתחלה (נניח $1\le i\le l$)
ואת כל ה $v_i\in B$ בסוף (נניח $l+1\le i\le n$)
ואז $x=\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i v_i+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\alpha_i v_i\in span(A)+span(B)$ ■.