פתרון תרגיל 2 בדידה

1. (א) הפרכה. נתבונן בקבוצות: $A = C = \{1\}, B = \emptyset$. מצד אחד, $A \backslash C = \emptyset$, ומצד שני: $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$.

(ב) הטענה נכונה:

$$x \in A \backslash (B \cap C) \iff x \in A \wedge x \notin B \cap C \iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$$

לפי דה-מורגן. כעת, לפי פילוג:

$$\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in A \backslash B \vee x \in A \backslash C$$

מהגדרת הפרש, ומהגדרת איחוד נקבל:

$$\iff x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

כנדרש.

(ג) הפרכה. נתבונן בקבוצות $A = \{1,2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$. מתקיים $A \cup B = A \cup C = \{1,2\}$ אך $B \neq C$.

(ד) הטענה נכונה. לפי הסעיף השני, $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = A \backslash (B \cap C)$.
אם $B \cap C = \emptyset$ וגם $A = B$, נקבל שאכן $A \backslash (B \cap C) = B \backslash \emptyset = B$.
לצד שני, אם $A \backslash (B \cap C) = B$, נניח בשלילה ש-$A \neq B$ או $B \cap C \neq \emptyset$.
אם $A \neq B$, אם קיים $x \in A$ המקיים $x \notin B$ נקבל $x \in A \backslash (B \cap C)$ וגם $x \notin B$ וסתירה, ואם קיים $x \in B$ המקיים $x \notin A$ נקבל $x \notin A \backslash (B \cap C)$ וגם $x \in B$ וסתירה.
אם $B \cap C \neq \emptyset$, קיים $x \in B \cap C$. מצד אחד $x \in B$ ומצד שני $x \notin A \backslash (B \cap C)$ וסתירה.
בכל מקרה קיבלנו סתירה, ולכן $A = B$ וגם $B \cap C = \emptyset$.

(ה) הטענה נכונה. אם $B \cap C = \emptyset$,

$$x \in (A \backslash B) \cup C \iff x \in A \backslash B \vee x \in C \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C$$

ולפי פילוג:

$$\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in C \vee x \notin B) \iff x \in (A \cup C) \wedge (x \notin B)$$

מכיוון ש: $B \cap C = \emptyset$, $x \in C \vee x \notin B \cong x \notin B$, ומהגדרת הפרש:

$$\iff x \in (A \cup C) \backslash B$$

מצד שני, אם $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash B$, אם $x \in C$ בפרט $x \in (A \backslash B) \cup C$ ולכן $x \in (A \cup C) \backslash B$ ובפרט $x \notin B$.
כלומר, $x \in C \to x \notin B$ ולכן $B \cap C = \emptyset$.

(ו) הטענה נכונה. אם $B=C$, ברור שמתקיים $A\Delta B=A\Delta C$.
לצד שני, אם $A\Delta B=A\Delta C$, נניח בשלילה שמתקיים $B\neq C$. לכן, בה"כ קיים $x\in B$ המקיים $x\notin C$.
אם $x\in A$, אז $x\notin A\Delta B$ וגם $x\in A\Delta C$ וסתירה. אם $x\notin A$ אז $x\in A\Delta B$ וגם $x\notin A\Delta C$ וסתירה. לכן $B=C$ כנדרש.

(ז) הטענה נכונה. אם $A\subseteq B\vee B\subseteq A$, בה"כ $A\subseteq B$ ואז $A\cup B=B$, $P(A)\subseteq P(B)$ ולכן $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)=P(B)$.
לצד שני, אם $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$, נניח בשלילה שמתקיים $A\not\subseteq B\wedge B\not\subseteq A$. לכן קיימים x,y המקיימים $x\in A,x\notin B,y\in B,y\notin A$.
$x,y\in A\cup B$ ולכן $\{x,y\}\in P(A\cup B)$ אך $x\notin B,y\notin A$ ולכן $\{x,y\}\notin P(A),P(B)$ כלומר $\{x,y\}\notin P(A)\cup P(B)$ וסתירה. לכן $A\subseteq B\vee B\subseteq A$ כנדרש.

2. (א) ראשית, נשים לב שאם $a>0$, $f(a)>0$ ואם $a<0$ אז $f(a)<0$. אם $a=0$ אז $f(a)=0$.
כעת, יהיו a,b המקיימים: $f(a)=f(b)$. לפי מה שציינו, פירוש הדבר שהסימנים של a,b זהים.
אם $a,b>0$, נקבל $|a|=a,|b|=b$ ולכן:

$$f(a)=\frac{a}{1+a}=\frac{b}{1+b}=f(b)$$

לכן:

$$a(1+b)=b(1+a)\Longrightarrow a+ab=b+ba\Longrightarrow a=b$$

אם $a,b<0$, נקבל $|a|=-a,|b|=-b$ולכן:

$$f(a)=\frac{a}{1-a}=\frac{b}{1-b}=f(b)$$

לכן:

$$a(1-b)=b(1-a)\Longrightarrow a-ab=b-ba\Longrightarrow a=b$$

בכל מקרה נקבל שאם $f(a)=f(b)$ אז $a=b$ (אם $a=b=0$ הדבר ברור) ולכן f חח"ע.
מצד שני, נשים לב שמתקיים:

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+|x|}\right|\leq\left|\frac{x}{|x|}\right|=1$$

ולכן עבור $2\in\mathbb{R}$ למשל לא קיים $x\in\mathbb{R}$ המקיים $f(x)=2$ ולכן f אינה על.

(ב) נשים לב שעבור $-2,-5\in\mathbb{R}$, $-2\neq-5$ אך $f(-2)=f(-5)=0$ ולכן f אינה חח"ע.
מצד שני, נשים לב שהפונקציה שלנו מתארת פרבולה "מחייכת", שקודקודה נמצא בנקודה:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2}\Longrightarrow y=f\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{9}{4}$$

כלומר, הערך המינימלי אותו יכולה הפונקציה לתת הוא $-\frac{9}{4}$, ולכן למשל עבור $-3\in\mathbb{R}$ לא קיים $x\in\mathbb{R}$ המקיים $f(x)=-3$.

(ג) ראשית, יהיו $(a,b),(c,d)$ המקיימים $f(a,b)=f(c,d)$. כלומר:

$$(a+b,a-b)=(c+d,c-d)$$

לכן:

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=c-d \end{cases}$$

אם נחבר את המשוואות נקבל $2a=2c$ כלומר $a=c$.
אם נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה נקבל $2b=2d$ כלומר $b=d$.
לכן בסה"כ $(a,b)=(c,d)$. כלומר אם $f(a,b)=f(c,d)$ אז $(a,b)=(c,d)$ ולכן הפונקציה חח"ע.
מצד שני, עבור $(1,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, אם קיים $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ המקיים $f(x,y)=(1,0)$, נקבל:

$$(x+y,x-y)=(1,0)$$

לכן:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

ומכאן $x=y=\frac{1}{2}$ בסתירה לכך ש: $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. לכן הפונקציה אינה על.
(אפשר לראות שלמערכת יש פתרון יחיד באמצעות מה שלמדתם על מערכת של משוואות ליניאריות ומטריצות).

(ד) $f(\{1\},\{2\})=f(\{2\},\{1\})=(\{1,2\},\emptyset)$ אך $(\{1\},\{2\})\neq(\{2\},\{1\})$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע.
מצד שני, נשים לב שתמיד $A\cap B\subseteq A\cup B$, ולכן בתמונה $f(A,B)=(A\cup B,A\cap B)$ הרכיב הראשון תמיד מכיל את הרכיב השני.
לכן עבור $(\{1\},\{2\})\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ לא קיים $(A,B)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ המקיים $f(A,B)=(\{1\},\{2\})$ ולכן הפונקציה אינה על.

(ה) נתבונן בקבוצה $A=\{1,2,4,6,8,10,\dots\}=\{1\}\cup 2\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}$. נשים לב שכל מספר טבעי $n>1$ אפשר לכתוב כסכום של שני מספרים מהקבוצה. אם n אי זוגי אז $1,n-1\in A$ מקיימים: $n=n-1+1$. אם n זוגי גדול מ-2, $n-2,2\in A$ מקיימים: $n=n-2+2$, ואם $n=2$, $1,1\in A$ מקיימים: $2=1+1$. לכן $f(A)=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.
כמו כן, אם נתבונן בקבוצה $\mathbb{N}$ קל לראות שלכל $n>1$ טבעי קיימים $n-1,1\in\mathbb{N}$ המקיימים $n=n-1+1$, ומצד שני לכל $x,y\in\mathbb{N}$ מתקיים $x+y>1$, ולכן $f(\mathbb{N})=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.
לפיכך, $f(A)=f(\mathbb{N})$ אך $A\neq\mathbb{N}$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע.
מצד שני, כפי שראינו לכל x,y טבעיים מתקיים $x+y>1$, ולכן עבור $\{1\}\in P(\mathbb{N})$ לא קיימת $A\in P(\mathbb{N})$ המקיימת $f(A)=\{1\}$ ולכן הפונקציה אינה על.