65

חשבון אנפיניטסמלי לפיסיקאים 1.

מבחן מועד א' סמסטר א' תשס"ו 07.02.2006

ד"ר יולי אידלמן

זמן המבחן: שלוש שעות

הנחיות: ענה על שאלה מס' 1 ועל עוד שלוש שאלות בלבד ללא שימוש בכל חומר עזר פרט לדף הנוסחאות המצורף. הוכח את תשובותיך.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) (5 נק') אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ($a_n > 0$ לכל n) מונוטונית יורדת אז טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

ב) (5 נק') $\lim_{x\to\infty}(e^{x^2}\cdot e^{-e^x}) = 0$

ג) (5 נק') אם $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$, גזירה בקטע $(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ אז $x_0=\frac{1}{2}$ נקודת קיצון מקומי.

ד) (5 נק') אם $f'(x)\geq g'(x)$ לכל $x\geq 0$ ו- $f(0)=g(0)$ אזי $f(x)\geq g(x)$ לכל $x\geq 0$.

ה) (5 נק') אם $f''(x)>0$ בקטע $[a,b]$ אז הגרף של $f(x)$ מעל המיתר שמחבר את $(a,f(a))$ עם $(b,f(b))$.

2. א) (13 נק') הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $|a_{n+1}-a_n|\leq \pi\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$. הוכח כי הסדרה מתכנסת.

ב) (12 נק') כמה שורשים ממשיים יש למשוואה $e^x = 3|x|$?

3. א) (12 נק') תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- R ולכל $x\in R$ מתקיים $|f(x)-x|<1$.
הוכח כי $f(x)$ מקבלת ב- R כל ערך ממשי. $\forall(y\in R)\ \exists(x\in R)\ [f(x)=y]$

ב) (13 נק') תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים ונגזרת שנייה רציפה ב- $[-1,1]$ ו- $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$.
הוכח כי:

(i) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

(ii) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.

(רמז: השתמש בנוסחת טיילור).

4. א) (13 נק') תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב-$(0,+\infty)$ המקיימת $f'(x) > x$ לכל $x > 0$.
הוכח כי $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה ב-$(0,+\infty)$.
(רמז: הוכח תחילה כי לכל $y > x > 0$ מתקיים $f(y) - f(x) \geq (y-x)x$).

ב) (12 נק') תהי $f(x)$ פונקציה אי-שלילית בקטע $[a,b]$ אשר חסומה בקטע.
הוכח כי עם לכל $\varepsilon > 0$ יש חלוקה T של $[a,b]$ שעבורה $\overline{S}(T) < \varepsilon$ אז $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

5. א) (12 נק') תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב (a,b), $a > 0$ ו-$\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$.
הוכח כי קיימת $x_0 \in (a,b)$ כך ש- $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

ב) (13 נק') הוכח $\dfrac{1}{\pi} \geq \int_{2\pi}^{3\pi} \dfrac{\sin x}{x}\, dx \geq \dfrac{2}{3\pi}$.

בהצלחה!

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

10⁴⁰ - 10⁴¹

46

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום. 25
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים. –
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה. 23
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. 25
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו. 25
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	98
המחברת נבדקה ביום	13/02/06
חתימת המורה	

תאריך הבחינה 07/02/06

שם הקורס תזונה לקשישים

שם המורה צבי אידלמן

החוג/המגמה ____

מס' זיהוי (העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)	0 6 6 1 5 9 2 8 6

83010

03211833011
066159286
46

3א)

עפ"י הנתון: $|f(x)-x|<1$

$\Downarrow$

$-1 < f(x)-x < 1$

$f(x) < 1+x$

ומכאן כי כאשר $x\to-\infty$

אז $f(x)\to-\infty$

כלומר

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) > x-1$

ומכאן שכאשר $x\to\infty$

אז $f(x)\to\infty$

כלומר

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

עפ"י שני הגבולות שקיבלנו ומכיוון ש- $f(x)$ רציפה עפ"י הנתון.

ועפ"י משפט ערך הביניים לקושי, נקבל כי:

-2

קיים $c\in(-\infty,\infty)$ כך ש- $-\infty < f(c) < \infty$

לא מנוסח נכון

כלומר, $f(x)$ מקבלת ב- R כל ערך ממשי.

מ.ש.ל.

$\frac{10}{12}$

(ב) נבנה ל-$f(x)$ טור טיילור עד סדר ראשון, ושארית
בצורת לגרנג' מסדר שני: (סביב $x=0$)

$$f(x) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0)}} + f'(0)\cdot x + \frac{f''(c)\cdot x^2}{2} = f'(0)x + \frac{f''(c)\cdot x^2}{2}$$

(i) עכ' נציב ~~...~~ נמצא את $f(\frac{1}{n^2})$

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = f'(0)\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{f''(c)\cdot\frac{1}{n^4}}{2}$$

כאשר $n\to\infty$, $c\to 0$ ובסביבה של 0 $f''(c)$ חסום,
עפ"י הנתון f'' רציפה בקטע $(-1,1)$. לכן ומכיון ש-$\frac{1}{n^2}$
גדול ממש מ-$\frac{1}{2n^4}$, $f(\frac{1}{n^2})$ מקבלת את הסימן של $f'(0)$, עבור n מספיק גדול.

נניח כי, אם $f'(0)>0$ אזי $f(\frac{1}{n^2})>0$ החל מ-n מסוים.
נשתמש במבחן השוואה לטורים חיוביים ונשווה לטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (מתכנס)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{f''(c)}{2n^4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(f'(0) + \frac{f''(c)}{2n^2}\right) = f'(0)$$

עפ"י הנתון קיבלנו מספר סופי גדול מ-0, ולכן שני הטורים
מתבדרים או מתכנסים יחד. מכיוון ש-$\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס
אז הטור $\sum f(\frac{1}{n^2})$ מתכנס.

במקרה ו-$f'(0)<0$ נשווה את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)$ ושוב מתכ
ונקבל אותה תוצאה.

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^2})$ מתכנס. מ.ש.ל.

(ד) נכתוב את הטור עבור $f(\frac{1}{n})$

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(c)}{2n^2}$$

בדומה להוכחה בחלק ג, עבור n מספיק גדול $f(\frac{1}{n})$
מקבלת את הסימן של $f'(0)$.

נניח כי $f'(0)>0$, נשווה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (טור הרמוני - מתבדר)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(c)}{2n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(f'(0) + \frac{f''(c)}{2n}\right) = f'(0)$$

מכיון שהפונקציה גזירה. $f'(0)$ מספר סופי וגם חיובי. (לפי הנתון)
ולכן הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד. הטור להשוואה מתבדר
ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ מתבדר.

כאשר $f'(0)<0$ נשווה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ שגם הוא מתבדר
ונקבל אותה התוצאה.

$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ מתבדר. מ.ש.ל.

$\frac{13}{13}$

4א

הפונקציה גזירה ב- $(0,+\infty)$. נשתמש במשפט לגראנז'

עבור $0<x<y$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c) \quad , \quad c\in[x,y] \Rightarrow c\geq x$$

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x) > c(y-x) > x(y-x)$$

עפ"י הנתון $f'(x)>x$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f(y)-f(x) > x(y-x)}$$

ניקח סדרה x_n כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$

נגדיר הסדרה $y_n=x_n+\delta$ ($\delta>0$). $\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+\delta)=\infty$

ומכאן: $y_n-x_n=\delta$

ניקח $\varepsilon=1$:

$$f(y_n)-f(x_n) > x_n(y_n-x_n) = x_n\cdot\delta > 1=\varepsilon$$

מהסעיף הקודם — עבור n מספיק גדול

$$\Downarrow$$

$$\exists(\varepsilon>0)\ \forall(\delta>0)\ \exists(x,y):\ |x-y|<\delta\ \left[|f(y)-f(x)|>\varepsilon\right]$$

13/13

$$\Downarrow$$

$f(x)$ אינה רציפה במ"ש ב- $(0,+\infty)$

קיבלנו הוספנו ערכים מוחלטים, אך אין לה משמעות מאחר ו- $y-x$ ו- ε חיוביים.

מ.ש.ל.

עפ"י רימן (4?)

$\forall(\varepsilon>0)\ \exists(T)\ [\bar{S}(T)<\varepsilon]$

(I) $\bar{S}(T)=\sum_{i=0}^{n} \sup f(\Delta t_i)\cdot\Delta t_i<\varepsilon$

מכיוון ש- $f(x)$ אי שלילית $\inf(f(x))\geq 0$ בקטע $[a,b]$

ולכן $\inf f(x)\geq 0$ בכל אחד מהקטעים בחלוקה. ולכן:

(II) $w_i=\sup f(\Delta t_i)-\inf f(\Delta t_i)\leq \sup f(\Delta t_i)$

$\sum_{i=0}^{n} w_i\cdot\Delta t_i \leq \sum_{i=0}^{n}\sup f(\Delta t_i)\cdot\Delta t_i<\varepsilon$

(II) עפ"י   עפ"י (I)

$\forall(\varepsilon>0)\ \exists(T)\ [\sum_{i=0}^{n} w_i\cdot\Delta t_i<\varepsilon]$ 12/12

ולכן $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

מ.ש.ל.

5) א. נגדיר $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$$

עפ"י הנתון: $g(a)=\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=g(b)$

מכיון ש- $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) כך אפיכא

אז $g(x)$ רציפה. [מנה של פונקציות רציפות ו- $x\neq 0$]

לכן, $g(x)$ עונה על התנאים למשפט רול בקטע $[a,b]$

כלומר קיים $x_0\in[a,b]$ כך ש:

$$g'(x_0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(x_0)\cdot x_0-f(x_0)}{x_0^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0)\cdot x_0-f(x_0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0)\cdot x_0=f(x_0)$$

מ.ש.ל.

12/12

⑦ ⑥

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

נסמן: $f(x)=\frac{1}{x}$

$g(x)=\sin x$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{2\pi}^{3\pi} = -(-1)+1 = 2$$

$\inf\limits_{[2\pi,3\pi]} f(x) = \frac{1}{3\pi}$ קיים

$\sup\limits_{[2\pi,3\pi]} f(x) = \frac{1}{2\pi}$ קיים

$$\Downarrow$$

$$\inf_{[a,b]} f(x)\cdot\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b g(x)f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f(x)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$$

נציב את הנתונים שקיבלנו!

$$\frac{2}{3\pi} = \frac{1}{3\pi}\cdot 2 \le \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{3\pi} \le \int_a^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx \le \frac{1}{\pi}$$

מ.ש.ל.

13/13

~~הטענה נכונה כי~~ . ...

(1) א) הטענה אינה נכונה.

דוגמא נגדית $a_n = 1+\frac{1}{n}$.

הסדרה a_n מונוטונית יורדת ו- $a_n > 0$

אך הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

אינו מתכנס מאחר ונע בין 1 ל-(-1).

ולא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_n$.

5/5

ב) הטענה נכונה:

$$\lim_{x\to\infty}(e^{x^2}\cdot e^{-e^x}) = \lim_{x\to\infty} e^{x^2-e^x} =$$

מכיון ש-e^x רציפה.

ניתן לחשב את הגבול של המעריך

$$\lim_{x\to\infty} x^2-e^x = \lim_{x\to\infty} e^x\left(\underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{0}-1\right) = \lim_{x\to\infty} e^x\cdot(-1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} \overset{(L)}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} \overset{(L)}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

5/5

נחזור לגבול המקורי:

$$\lim_{x\to\infty} e^{x^2-e^x} = e^{\lim_{x\to\infty} x^2-e^x} = e^{"-\infty"} = 0$$

ג) הטענה אינה נכונה.

$x_0=\frac{1}{2}$ יכולה להיות גם נקודת פיתול אם $f''(\frac{1}{2})=0$.

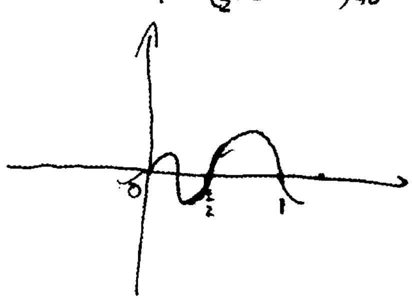
דוגמא נגדית:

הפונקציה בגרף עולה ו)

כי הנקודה פיתול טוב)

$x=\frac{1}{2}$ אינה נקודת קיצון.

5/5



③ קיימות הנגזרות ל $f(x)$ ו $g(x)$ ולכן לפי משפט קושי: $\exists c$

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

כאשר $c<x$
ש $c>0$

ועל פי הנתון $f'(x) \geq g'(x)$ ⟸ $\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 1$ ובפרט $\frac{f'(c)}{g'(c)} \geq 1$

$\Downarrow$

~~$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} \geq 1$~~

$$f(x)-f(0) = \frac{f'(c)}{g'(c)}(g(x)-g(0))$$

$\frac{5}{5}$

$\Downarrow$

$$f(x)-f(0) \geq g(x)-g(0)$$

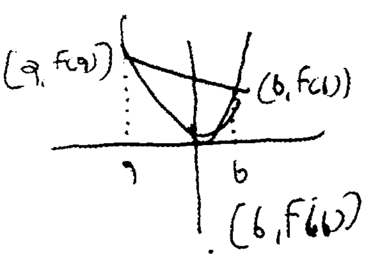
$\Downarrow$

וכי $f(0)=g(0)$

$$f(x) \geq g(x)$$

ולכן הטענה נכונה

ד) הטענה אינה נכונה.



דוגמא נגדית: $f(x)=x^2$. $f''(x)=2>0$

אולם $f(x)$ נמצאת מתחת
לישר המחבר את $(a,f(a))$ ו $(b,f(b))$

למעשה, הטענה הפוכה נכונה תמיד והטענה ההפוכה היא הנכונה
מכך, מהגדרה של ~~קמירות~~, הקשר בין $f''(x)$
לקמירות של פונקציה..

$\frac{5}{5}$