פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: משוואות המילטון, חוקי שימור וסוגרי פואסון

1. הלגרנז'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ \ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

ולכן

$$\mathcal{H} = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}.$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

נקבל 4 משוואות תנועה:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m},\quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},\quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0$$

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב $x \to x + \epsilon y,\ y \to y - \epsilon x$.

הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות הינו

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

תחת טרנספורמצית סיבוב

$x \to x + \epsilon K_x = x + \epsilon y,\ y \to y + \epsilon K_y = y - \epsilon x$ נקבל

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(1 + \epsilon^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \epsilon^2 + ...\right) = \mathcal{L} + O(\epsilon^2),$$

ולכן $\mathcal{L}$ סימטרי לסיבוב.

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו ?

ממשפט נטר נקבל שימור תנע זויתי

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} K_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} K_y = m\dot{x}y - m\dot{y}x = Const.$$

2. הוכיחו כי שני לגראנג׳יאנים $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונקציה של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q},t)$, כלומר $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q},t)/dt$, שומרים על משוואות התנועה.

(הדרכה: הוכיחו כי $\delta S' = \delta S + o(\epsilon)$, כאשר $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$ הפעולה המתאימה ל $\mathcal{L}'$ כאשר עושים ואריציה $f(\vec{q}+\epsilon\vec{\eta},t) - f(\vec{q},t)$ ו $\vec{\eta}$ פוקציה שרירותית המתאפסת על השפה, כלומר $\vec{\eta}(t_1) = \vec{\eta}(t_2) = 0$. הסיקו מכך כי משוואות התנועה נשמרות).

נעשה ואריציה ללגראנג׳יאן החדש ונקבל

$$\delta S' = \delta S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(f(\vec{q} + \epsilon\vec{\eta}, t) - f(\vec{q},t) \right) dt =$$

$$\delta S + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \eta_i \right) dt + o(\epsilon) = \delta S + \epsilon \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \eta_i \right)_{t_1}^{t_2} + o(\epsilon),$$

ומאחר ו $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0, \ \forall i$ הביטוי בסוגריים הגדולים מתאפס. מאחר ומהתנאי $\delta S = o(\epsilon)$ מתקבלות משוואות אויילר־לגראנג׳ (EL) ובסדר ראשון ב ϵ הפעולות נשמרות, משוואות EL נשמרות גם כן.

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית הנעה במהירות קבועה $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$ ביחס למעבדה.

(א) קבלו את הלגראנג׳יאן במעלית $\mathcal{L}$ ובמעבדה $\mathcal{L}'$ (רשמו את הפוטנציאלים ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי
$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta,t)/dt$, כאשר
$f(\theta,t) = -mv_0\ell\cos\theta - \frac{1}{2}mgv_0t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2t$.
הלגראנג׳יאן במעלית נתון ע״י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta).$$

נסמן ב (X,Y) את מיקום המסה ביחס למעבדה. אזי

$$(X,Y) = (\ell\sin\theta, v_0t + \ell(1-\cos\theta)).$$

נקבל אפוא, במערכת המעבדה, את הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)-mgY = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2+v_0^2+2\ell v_0\dot{\theta}\sin\theta)-mgv_0t-mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$= \mathcal{L}+m\ell v_0\dot{\theta}\sin\theta-mgv_0t+\frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{L}+\frac{d}{dt}(-mv_0\ell\cos\theta-\frac{1}{2}mgv_0t^2+\frac{1}{2}mv_0^2t)$$

$$= \mathcal{L}+\frac{d}{dt}f(\theta,t).$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור $\mathcal{L}$ ו $\mathcal{L}'$ ווראו כי הן אכן זהות.

משוואת התנועה במעלית הינה

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = m\ell^2\ddot{\theta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mg\ell\sin\theta,$$

ואילו במערכת המעבדה נקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\theta}}\right) = m\ell^2\ddot{\theta}+m\ell v_0\dot{\theta}\cos\theta = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\theta} = m\ell v_0\dot{\theta}\cos\theta-mg\ell\sin\theta,$$

כך שמשוואות התנועה בשתי המערכות אכן זהות [1].

4. הלגראנג'יאן של חלקיק חפשי בקורדינטות פאראבוליות (ξ,η,ϕ) נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\xi^2+\eta^2)(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+\tfrac{1}{2}m\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$$

(א) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ,p_η,p_ϕ).

$$p_\xi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = m(\xi^2+\eta^2)\dot{\xi},\ p_\eta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}} = m(\xi^2+\eta^2)\dot{\eta},\ p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m\xi^2\eta^2\dot{\phi}.$$

(ב) מצאו את ההמילטוניאן.

$$\mathcal{H} = p_\xi\dot{\xi}+p_\eta\dot{\eta}+p_\phi\dot{\phi}-\mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\xi^2+p_\eta^2}{\xi^2+\eta^2}+\frac{p_\phi^2}{\xi^2\eta^2}\right).$$

[1] נשים לב כי המעלית נוסעת במהירות קבועה ביחס למעבדה, ולכן, בהתאם לטרנספורמציית גלילאו, חוקי הפיזיקה נשמרים בשתי מערכות הייחוס או במילים אחרות, משוואות התנועה נשמרות

5. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות
להיות $f(q_1,...,q_n;p_1...,p_n;t),\ \ g(q_1,..,.q_n;p_1...,p_n;t)$

$$\{f,g\}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

.

(א) הוכיחו כי $\frac{df}{dt}=\{f,\mathcal{H}\}+\frac{\partial f}{\partial t}$, כאשר $\mathcal{H}$ ההמילטוניאן של המערכת

$$\frac{df}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=$$

$$=\sum_i\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right)\right]+\frac{\partial f}{\partial t}=\{f,\mathcal{H}\}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

כאשר השתמשנו במשוואות המילטון $\dot{q}_i=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$.

(ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה שמצאתם ב 1ד מקיימת $\{f,\mathcal{H}\}=0$

ההמילטוניאן בקורדינטות קרטזיות נתון ע"י

$$\mathcal{H}=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

נחשב את סוגרי פואסון של $L_z=mp_xy-mp_yx$ עם $\mathcal{H}$:

$$\{L_z,\mathcal{H}\}=\frac{\partial L_z}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_x}-\frac{\partial L_z}{\partial p_x}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}+\frac{\partial L_z}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_y}-\frac{\partial L_z}{\partial p_y}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}=$$

$$=-mp_y\frac{p_x}{m}+my\frac{GMmx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+mp_x\frac{p_y}{m}-mx\frac{GMmy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0.$$

(ג) הכלילו את תוצאת 5ב לפוטנציאל כלשהוא מהצורה $U(x,y)=U(x^2+y^2)$

עבור כל פוטנציאל מהצורה $U(x,y)=U(x^2+y^2)$ נקבל

$$\{L_z,\mathcal{H}\}=-mp_y\frac{p_x}{m}-myU'\cdot 2x+mp_x\frac{p_y}{m}+mxU'\cdot 2y=0.$$

6. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right),\ a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$.

(א) בטאו את $\mathcal{H}$ באמצעות a, a^*.

$$\mathcal{H} = \omega a a^* = \omega a^* a.$$

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\},\ \{a, \mathcal{H}\},\ \{a^*, \mathcal{H}\}$.

$$\{a, a^*\} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial a^*}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial a^*}{\partial x} = \frac{m\omega}{2}\left(-\frac{i}{m\omega} - \frac{i}{m\omega}\right) = -i.$$

מהתכונות $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (אנטיסימטריות) ו $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ של סוגרי פואסון נקבל

$$\{a, \mathcal{H}\} = \omega\{a, aa^*\} = \omega(\{a, a\}a^* + \{a, a^*\}a) = \omega\{a, a^*\}a = -i\omega a.$$

$$\{a^*, \mathcal{H}\} = \omega\{a^*, aa^*\} = \omega(\{a^*, a\}a^* + \{a^*, a^*\}a) =$$

$$= \omega\{a^*, a\}a^* = -\omega\{a, a^*\}a^* = i\omega a^*.$$

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

משוואות התנועה הן

$$\frac{da}{dt} = \{a, \mathcal{H}\} = -i\omega a,\ \ \frac{da^*}{dt} = \{a^*, \mathcal{H}\} = i\omega a^*,$$

ופתרונן

$$a = a_0 e^{-i\omega t},\ \ a^* = a_0^* e^{i\omega t}.$$

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

$$x = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\left(\frac{a + a^*}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\left(a_0 e^{-i\omega t} + a_0^* e^{i\omega t}\right)$$

$$p = \sqrt{2m\omega}\left(\frac{a - a^*}{2i}\right) = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(a_0 e^{-i\omega t} - a_0^* e^{i\omega t}\right)$$

(ה) חשבו את $\{x,p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 6ד. השוו לחישוב הישיר.

$$\{x,p\} = \frac{1}{2i}\{a+a^*, a-a^*\} = \frac{1}{2i}\left(-2\{a,a^*\}\right) = 1.$$

מחישוב ישיר נקבל

$$\{x,p\} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = 1.$$