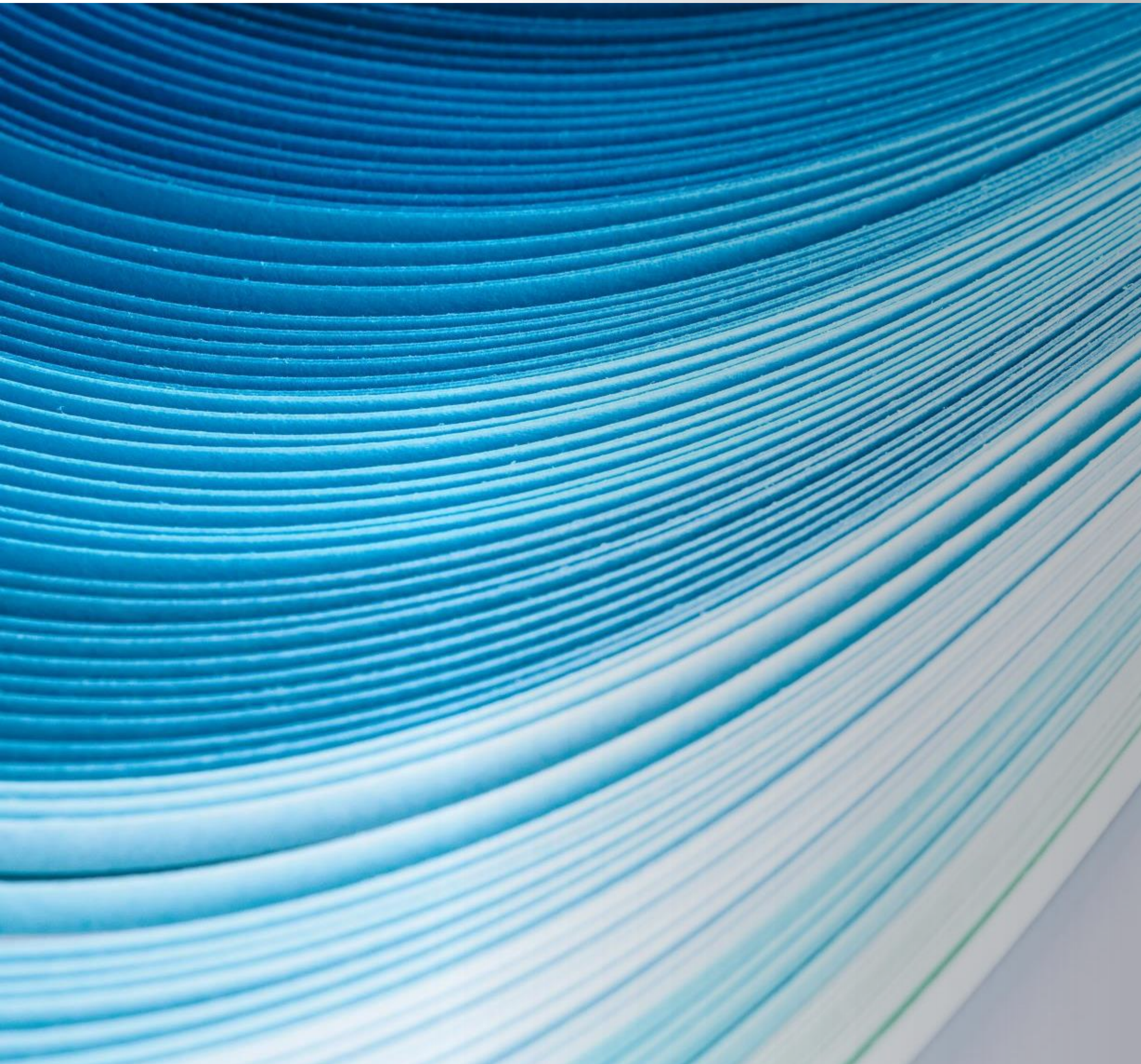


תרגול 5-אושרית

יחסי סדר(חלקי וקווי),איברים מיוחדים וחסמים.

[illegible] הקד המכיל איבר שלם 33?

תזכורת:

יחסי סדר:

הג': יחס R על A נקרא **אנטי-סימטרי** אם מתקיים - $\forall x,y \in A : (x,y)\in R \wedge (y,x)\in R \rightarrow x=y$

כלומר- אם $x \neq y$ לא יכול להיות שמתקיים היחס $xRy \wedge yRx$.

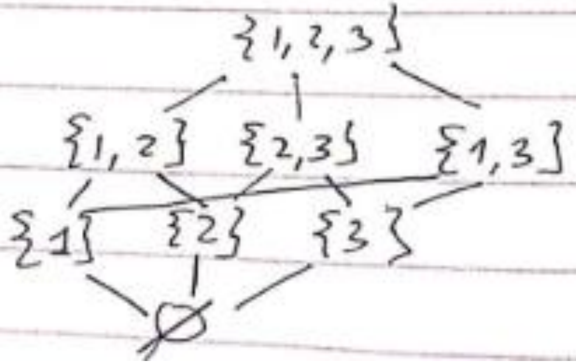
הג': יחס R על A נקרא **יחס סדר חלקי** אם R רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי.

דוג': (1) היחס $\leq$ על הממשיים. (2) היחס $\subseteq$ על קב'. (3) היחס מחלקאת "|" על הטבעיים.

שים לב - להשתמש בסימון יחסי סדר חלקיים.

הע': כדי להציג יחס סדר חלקי בצורה ויזואלית - נקרא דיאגרמת הסה. כל איבר שמקושר לאיבר מתחתיו גדול ממנו בסדר.

דוג': $A=\{1,2,3\}$ יחס ההכלה.



הגד: יהי R יחס על A, אזי היחס ההופכי מוגדר להיות: $R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$

תרגיל:

אם R יחס סדר חלקי על A. צ"ל: R^{-1} יחס סדר חלקי על A

פתרון:

1. רפלקסיביות ← יהי $a\in A$ ונרצה להוכיח כי $(a,a)\in R^{-1}$, R יחס סדר חלקי, ולכן רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ –

לפי הגד' R^{-1} נקבל – $(a,a)\in R^{-1}$ מש"ל

2. אנטי סימטריות ← יהי $a,b\in A$ כך ש- $aR^{-1}b \wedge bR^{-1}a$ צ"ל – $a=b$.

לפי הגד' יחס הופכי

$$bRa \wedge aRb \xrightarrow{\text{R יחס סדר חלקי, ובפרט אנטי-סימטרי}} a=b$$

מש"ל

3. טרנזיטיביות ← יהי $a,b,c\in A$ כך ש- $aR^{-1}b \wedge bR^{-1}c$ צ"ל – $aR^{-1}c$

לפי הגד' יחס הופכי

bRa , cRb

R יחס סדר חלקי, ובפרט טרנזיטיבי

cRa

לפי הגד' יחס הופכי

$aR^{-1}c$ מש"ל

קצת הגדרות...

איברים מיוחדים:

הגד': תהי A קב' ו-R יחס סדר חלקי על הקב'.

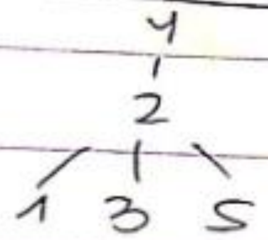
1. איבר $x\in A$ נקרא מינימלי ביחס ל-R אם לכל $y\in A$: אם $(y,x)\in R \Rightarrow y=x$. כלומר אין איבר קטן ממנו (מ-x).
לא חייב להתקיים ש-x ביחס כלשהו עם איבר כלשהו.
2. איבר $x\in A$ נקרא מקסימלי ביחס ל-R אם לכל $y\in A$: אם $(x,y)\in R \Rightarrow y=x$. כלומר אין איבר גדול מ-x.
לא חייב להתקיים ש-x ביחס עם איבר כלשהו.
3. איבר $x\in A$ נקרא איבר קטן ביותר/מינימום ביחס ל-R אם לכל $y\in A$: $(x,y)\in R$ כלומר x קטן מכל האיברים.
חייב להיות ביחס עם כל האיברים בקב'.
4. איבר $x\in A$ נקרא איבר גדול ביותר/מקסימום ביחס ל-R אם לכל $y\in A$ $(y,x)\in R$, כלומר x גדול מכל האיברים.
x חייב להיות ביחס עם כל האיברים בקב'.

הערה: מינימום $\Rightarrow$ מינימלי מקסימום $\Rightarrow$ מקסימלי אך לא להפך!!!

תרג: נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$ ונגדיר עליה יחס סדר חלקי:

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,4),(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

דיאגרמת הסה



לוקחים גדולים מכל הזוגות ומוצאים הקטנים מהם.

1) מצאו - את האיברים המינימליים? 2) מצאו מקסימום לקב' 3) האם קיים מינימום?

פתרון:

1) 1,3,5 ← מינימליים, אין איבר שקטן מהם.

2) 4 ← מקסימום - גדול מכל איברי הקב'

3) לא - לא ניתן להשוות בין 1,3,5.

תרגיל:

תהי $(A,\le)$ קבוצה סדורה סופית לא ריקה. הוכיחו - קיים איבר מינימלי.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על גודל הקבוצה $n=|A|$.

בסיס האינדוקציה: ~~[illegible]~~ נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n=1$ ברור - אין איבר שונה מהאיבר היחיד שקטן ממנו - נתון באופן ריק.

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $|A|=n-1$ ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $|A|=n$.

קיים $a\in A$ ונתבונן בקבוצה הסדורה $(A\setminus\{a\},\le)$ שבה יש איבר מינימלי לפי הנחת האינדוקציה, נסמנו b.

נחזור כעת ל-A ונחלק למקרים:

1. אם $a\le b$ אז a מינימלי ב-A כי אם משהו שונה ממנו וקטן ממנו אז גם קטן מ-b (טרנזיטיביות) ובניגוד ש-b מינימלי ב-$A\setminus\{a\}$. נקודה שבה b מינימלי לכן ש-$a\ne b$ ו-$a\le b$.

אפי-ממקרה

2. אם $a\not\le b$, אז b מינימלי גם ב-A. כי לכל $x\in A\setminus\{a\}$ לא מתקיים $x\lneq b$ יתכן עבור a לא מתקיים $a\le b$

ולכן סה"כ מתקיים הג' איבר מינימלי. **מש"ל**

הגד': יהי R יחס סדר חלקי על A. אם לכל 2 איברים a,b ב-A מתקיים: $(a,b)\in R \vee (b,a)\in R$
אז R נקרא **יחס קווי/ליניארי.**

תרגיל: יהי $(A,\le)$ קבוצה סדורה קווית. (הוכיחו) כי אם x מינימלי אז x קטן ביותר.

הוכחה: $\le$ - יחס סדר קווי ולכן לכל $a\in A$ מתקיים השוואה - $(x,a)\in\le$ או $(a,x)\in\le$
(נתון - כי x מינימלי ב-a ולכן אם $(a,x)\in\le$ אזי - $a=x$.
ולכן נקבל כי לכל $a\in A$ מתקיים כי $(x,a)\in\le$ $\Leftarrow$ **x קטן ביותר ב-A.**

חסמים:

הגד: יהיו A קב', B קב' המוכלת ב-A ו-R יחס סדר חלקי:

1. חסם מלעיל של B הוא איבר $x\in A$ כך שמתקיים $\forall y\in B: (y,x)\in R$
2. חסם מלרע של B הוא איבר $x\in A$ כך שמתקיים $\forall y\in B: (x,y)\in R$
3. החסם העליון (סופרימום) של B הינו המינימום של קב' חסמי המלעיל (אם קיים) מסומן - $\sup B$.

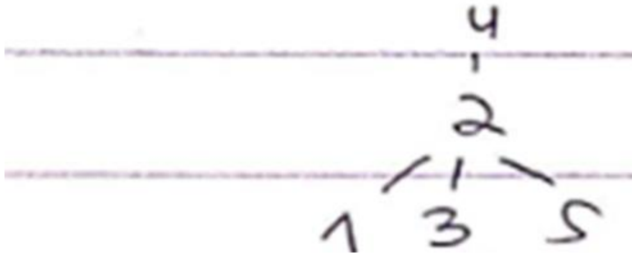
חסם המלעיל הקטן ביותר

4. החסם התחתון (אינפימום) של B הינו המקסימום של קב' חסמי המלרע (אם קיים) מסומן - $\inf(B)$.

חסם המלרע הגדול ביותר

דוגמא: (1) נשוב לדוגמא הקודמת. $B=\{1,3,5\}$ קב' חסמי המלעיל של B - $\{2,4\}$
המינימום של קב' זו הוא 2 ולכן - הוא חסם עליון של B.
ו-B אין חסם מלרע ולכן - בהכרח אין לה חסם תחתון.

שרטוט לדוגמא:



דוגמא (2): $B=\{1,2,5\}$

חסמי מלרע - אין
חסם תחתון - אין
חסמי מלעיל - $\{4\}$
חסם עליון - 4

מסקנות שימושיות ללא הוכחה:
1. אם יש חסם מלרע יחיד הוא האינפימום.
2. אם יש חסם מלעיל יחיד הוא הסופרימום.
3. אם החסם הוא איבר בקבוצה עצמה אזי הוא המינימום או המקסימום בעצמו.

בהצלחה!!!