הנושא מתחיל עם המשוואה $x^2+1=0$ שאין לה פתרון בממשיים. ניסוח אחר - לפולינום $P(x)=x^2+1$ אין שורשים ממשיים.

המציאו "מספר דמיוני" $i=\sqrt{-1}$ שפותר את המשוואה.

אבל יש עוד פולינומים ללא שורשים ממשיים, למשל $P(x)=x^2+9$. אומרים שיש לו שורש $3i$ ואז

$$(3i)(3i)=3i3i=3\cdot 3\cdot i\cdot i=9\cdot(-1)=-9$$

עוד דוגמה: $P(x)=x^2+4x+8$. השורשים הם לכאורה

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2}\stackrel{?}{=}\frac{-4\pm 4i}{2}=-2\pm 2i$$

המספרים האלה נקראים "מרוכבים". ז.א., מספרים מהסוג $a+bi, a,b\in\mathbb{R}$.

כדי להוכיח שהם מקיימים את המשוואה $x^2+4x+8=0$ נצטרך להפעיל את כל כללי האריתמטיקה במספרים הממשיים.

ובכן הגדירו את המספרים המרוכבים $\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$ והוכיחו שהוא "שדה", ז.א. יש ב$\mathbb{C}$ חיבור, חיסור, כפל וחילוק עם כל הכללים הרגילים.

בפרט אם $\begin{matrix} z=a+bi \\ w=c+di \end{matrix}$ <u>מגדירים</u>:

- $\begin{matrix} z+w=(a+c)+(b+d)i \\ zw=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{matrix}$
- היחידה לחיבור היא $0=0+0i$
- היחידה לגבי כפל היא $1=1+0i$

בעצם, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. באופן טבעי: אם $z=a+bi\in\mathbb{C}$ ואם $b=0$ אז למעשה z ממשי. לכן $0,1$ שתי דוגמאות של מספרים ממשיים בתוך $\mathbb{C}$.

לגבי חילוק אם $w\neq 0$ אזי

$$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

הגדרות נוספות

אם $z=a+bi$,

- a נקרא החלק הממשי של z, מסומן $a=\mathrm{Re}\ z$
- b נקרא החלק המדומה של z, מסומן $b=\mathrm{Im}\ z$
- "הצמוד של z" הוא $\bar{z}=a-bi$.

תכונות של הצמוד:

1. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. אם $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4. אם $n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$
5. $z + \bar{z} = 2\text{Re } z$
6. $z - \bar{z} = 2i\text{Im } z$
7. $\overline{(\bar{z})} = z$
8. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
9. $z \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ "מדומה טהור"

הערה

אפשר להכליל את הכללים 1,2,3 לסכומים ומכפלות של הרבה מספרים(אבר רק לסכומים ומכפלות סופיים)

משפט

יהי $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ פולינום ממשי. ז.א. כל ה$a_{kj} \in \mathbb{R}$. ונניח שלP קיים שורש מרוכב. ז"א קיים $z \in \mathbb{C}$ כך ש$P(z) = 0$. אזי גם $\bar{z}$ שורש של P.

הוכחה

הנתון אומר $0 = P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. "נצמיד":

$$0 = \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z})$$

המישור המרוכב

במישור רגיל עם צירים x וy נתאים לנקודה (x, y) את המספר $z = x + yi$.

הגדרה

עבור $z = a + bi$ נגדיר $|z|$ להיות המרחק מz ל0 במישור המרוכב. ז.א.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

נשים לב שתמיד $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

תכונות של ערך מוחלט

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$, אזי:

1. $|zw| = |z|\,|w|$
2. אם $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
3. אי שוויון המשולש: $|z+w| \leq |z| + |w|$
4. $|z-w| \geq |z| - |w|$ (גירסה שנייה לאי שוויון המשולש)

הוכחה

1. $|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$ ששקול לתכונה 1.
2. $\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \left(\frac{z}{w}\right)\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \left(\frac{z}{w}\right)\left(\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\right) = \frac{z\bar{z}}{w\bar{w}} = \frac{|z|^2}{|w|^2}$ ששקול לתכונה 2.
3. הוכחה גיאומטרית ־ בונים משולש. $|z+w|$= אורך צלע אחת$\leq$סכום שתי צלעות = $|z|+|w|$.

הוכחה אנליטית: נסתמך על דבר פשוט: אם $z \in \mathbb{C}$ אז $|\text{Re } z| \leq |z|$ (כי אם $z = a+bi$ אז $|\text{Re } z| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$). כעת נוכיח את התכונה:

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + z\text{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$$

וזה שקול לתכונה 3.

4. נרשום $z = (z-w)+w$. לפי תכונה 3:

$$|z| \leq |z-w| + |w|$$

$$|z| - |w| \leq |z-w|$$

ע"פ סימטריות:

$$|w| - |z| \leq |w-z| = |z-w|$$

נובע:

$$||z| - |w|| \leq |z-w|$$

וזה תכונה 4.

הכללה של אי שוויון המשולש:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

הצגה קטבית(פולארית) של מספרים מרוכבים

נחזור למישור המרוכב:

$$z = x + iy$$

נסמן בr את המרחק מהראשית, ובθ את הזוית מציר הx:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

בקיצור:

$$z = r\text{cis}\theta$$

- r=מרחק מאפס=$|z|$
- θ נקרא הזוית של z או הארגומנט של z, מסומן $\theta = \arg z$

r מוגדר באופן חד משמעי, אבל בגלל מחזוריות $\text{cis}\left(\theta\right) = \text{cis}\left(\theta + 2\pi\right) = \text{cis}\left(\theta + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. ז.א. לאותו z אפשר להתאים ∞ זויות.

כדי לקבל ערך אחד ויחיד ל$\arg z$ אפשר להגביל אותו. ובכן, יש מגדירים את הערך העיקרי או הענף העיקרי של $\arg z$ ע"י $\text{Arg}z$ כאשר מוסכם

$$-\pi < \text{Arg}z \leq \pi$$

Argz זו פונקציה של z(ז.א. חד־משמעית) אבל היא לא רציפה כי היא קופצת 2π בבת אחת בקרן השמאלית של ציר הx.

Great moments in mathematics

נגדיר

$$z_1 = r_1 \text{cis}\theta_1$$

$$z_2 = r_2 \text{cis}\theta_2$$

ונכפיל:

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$= r_1 f_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i (\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1)) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

ז.א.:

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$$

(שכבר הוכחנו!)

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

זה בעצם שוויון של קבוצות. לכל אגף יש ∞ ערכים והם אותם הערכים.
לגבי $\text{Arg}z$, אין שוויון ממש אלא

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 \mod 2\pi$$

דוגמאת חישוב

$$z_1 = z_2 = -i$$

$$|z_1| = |z_2| = 1$$

$$\text{Arg}z_1 = \text{Arg}z_2 = -\frac{\pi}{2}$$

כי חייבים לבחור $\text{Arg}z$ בין $-\pi$ ל־π.

$$z_1 z_2 = -1$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(-1) = \pi$$

$$\text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 = \frac{-\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} = -\pi$$

יש שוויון רק מודולו 2π.

ראינו

אם $z_1 = r_1 \text{cis}\theta_1, z_2 = r_2 \text{cis}\theta_2$, אזי $z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{cis}\left(\theta_1 + \theta_2\right)$.

חילוק

אם $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \text{cis}\theta_1}{r_2 \text{cis}\theta_2}$$

נעיר:

$$\bar{z}_2 = r_2 \text{cis}\left(-\theta_2\right)$$

כי

$$r_2 \text{cis}\left(-\theta_2\right) = r_2\left(\cos\left(-\theta_2\right) + i\sin\left(-\theta_2\right)\right) = r_2\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right) = \bar{z}_2$$

לפי זה:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \text{cis}\theta_1 \cancel{r_2} \text{cis}\left(-\theta_2\right)}{r_2 \text{cis}\theta_2 \cancel{r_2} \text{cis}\left(-\theta_2\right)} = \frac{r_1 \text{cis}\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{r_2 \text{cis}\left(\theta_2 - \theta_2\right)} = \frac{r_1}{r_2} \text{cis}\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

הכללה

למכפלה $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$ מכפילים את הערכים המוחלטים ומחזירים את הזויות. ז.א., אם לכל k $z_k = r_k \text{cis}\left(\theta_k\right)$,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \text{cis}\left(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n\right)$$

ובפרט אם

$$z = r\text{cis}\theta$$

$$z^n = r^n \text{cis}\left(n\theta\right)$$

במקרה $r = 1$ מקבלים $\left(\text{cis}\theta\right)^n = \text{cis}\left(n\theta\right)$.
ז.א.

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$$

"נוסחת דה מואבר".

דוגמת חישוב

המציאו נוסחאות ל$\cos 30$ ו$\sin 30$ בעזרת דה מואבר.

תשובה

$$\cos(30) + i\sin(30) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 =$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 =$$

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

לכן

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

שורשים של מספרים מרוכבים

נניח ש$z = r\mathrm{cis}\theta \in \mathbb{C}$ ו$n \in \mathbb{N}$. נחשב $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$.

ובכן: אם $w = r^{1/n}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$ אז $w^n = \left(r^{1/n}\right)^n \mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n}\cdot n\right) = r\mathrm{cis}\theta = z$.

אבל, לכל $k \in \mathbb{N}$

$$z = r\mathrm{cis}(\theta) = r\mathrm{cis}(\theta + 2\pi k)$$

לכן

$$z^{1/n} = r^{1/n}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

לכאורה, יש כאן ∞ שורשים מסדר n. אבל אינו כן, כי למשל אם $k = n$ נקבל שורש

$$r^{1/n}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right) = r^{1/n}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) = r^{1/n}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

שזה שווה לשורש הראשון($k = 0$)

גם עבור $k > n$ השורשים חוזרים על עצמם באופן מחזורי. התוצאה היא שלכל $0 \neq z \in \mathbb{C}$ יש בדיוק n שורשים מסדר n

$$z^{1/n} = r^{1/n}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, ...n-1$$

דוגמת חישוב

נחשב את כל הערכים המרוכבים של $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$.

תשובה

נתון $z=-\sqrt{3}+i$. תחילה נעביר אותו להצגה קטבית.

$$r=|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}=2$$

$$\theta=\arctan {}^{\mathrm{y}}/_{\mathrm{x}}$$

ז.א.

$$z=2\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

לכן

$$z^{1/4}=2^{1/4}\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{24}\right)=\sqrt[4]{2}\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{24}\right)$$

תרגילים נוספים

1. עבור θ כלשהו חשבו $|\mathrm{cis}\theta|$

תשובה

$$\mathrm{cis}\theta=\cos\theta+i\sin\theta$$

ולכן

$$|\mathrm{cis}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

2. הוכיחו ש$|z|=1$$\Leftrightarrow$$\bar{z}={}^{1}/_{\mathrm{z}}$

הוכחה

$$|z|=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow\bar{z}={}^{1}/_{\mathrm{z}}$$

3. נניח ש$a\in\mathbb{C}$ ו$a\neq z\in\mathbb{C}$ ו$|z|=1$. הוכיחו: $\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|=1$

הוכחה

נגדיר $w = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$. צ"ל $\bar{w} = {}^{1}\!/_{w}$. ובכן:

$$\bar{w} = \overline{\left(\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right)} = \frac{\bar{a}-\bar{z}}{1-a\bar{z}} = \frac{\bar{a}-{}^{1}\!/_{z}}{1-a\cdot\dfrac{1}{z}} = \frac{\bar{a}\cdot z-1}{z-a} = \frac{1}{w}$$

■

הערה - שימושים

הגדרנו $|z|$= המרחק מהראשית.
מתקיים $|z-w|$=המרחק מz לw
לכן מעגל ברדיוס r סביב z_0 הוא

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = r\}$$

העיגול שבתוך המעגל מתואר ע"י

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r\}$$

סדרות מרוכבות

הגדרה

תהי $\{z_n\}$ סדרה של מספרים מרוכבים, ויהי $z_0 \in \mathbb{C}$. נאמר ש$\lim_{n\to\infty} = z_0$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$

$$|z_n - z_0| < \epsilon$$

משפט 1

תהי $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ סדרה מרוכבת, ותהי $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. אזי הטענות הבאות שקולות:

1. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n - z_0| = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ במובן של התכנסות ב$\mathbb{R}^2$

משפט 2(אריתמטיקה של גבולות)

נניח $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ ו$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$ ו$c \in \mathbb{C}$ קבוע. אזי:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} cz_n = cz_0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = z_0 w_0$
4. אם $w_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}$

פונקציות

הגדרה

תהי $z(t)$מוגדרת בסביבה מנוקבת של t_0. נאמר ש$\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0\,(\in \mathbb{C})$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |t - t_0| < \delta$ מתקיים $|z(t) - z_0| < \epsilon$.

משפט 3

נניח ש$z(t) = x(t) + iy(t)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של t_0, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, אזי הטענות הבאות שקולות:

1. $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0$
2. $\lim\limits_{t\to t_0}|z(t) - z_0| = 0$
3. $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ וגם $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) \to y_0$
4. לכל סדרה $t_0 \neq t_n \to t_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z(t_n) = z_0$

משפט 4(אריתמטיקה של גבולות)

נניח ש$\lim_{t\to t_0} z(t) = z_0$ ו$\lim_{t\to t_0} w(t) = w_0$ ו$c \in \mathbb{C}$ קבוע. אזי:

1. $\lim_{t\to t_0} z(t) \pm w(t) = z_0 \pm w_0$
2. $\lim_{t\to t_0} cz(t) = cz_0$
3. $\lim_{t\to t_0} z(t)\, w(t) = z_0 w_0$
4. אם $w_0 \neq 0$, $\lim_{t\to t_0} \frac{z(t)}{w(t)} = \frac{z_0}{w_0}$

הגדרה

תהי $z(t)$ מוגדרת בסביבה שלמה של t_0. נאמר שהיא רציפה בt_0 אם $\lim_{t\to t_0} z(t) = z(t_0)$

משפט 5

1. $z(t) = x(t) + iy(t)$ רציפה בt_0 $\Leftrightarrow$ $x(t)$ ו$y(t)$ רציפות בt_0.
2. יש אריתמטיקה: אם $z(t)$ ו$w(t)$ רציפות בt_0, אז $z(t) \pm w(t)$, $cz(t)$ ו$z(t)\, w(t)$ רציפות בt_0. אם $w(t_0) \neq 0$ גם $\frac{z(t)}{w(t)}$ רציפה בt_0.

נגזרות

נניח ש$z(t)$ מוגדרת בסביבת t_0 ונגדיר

$$z'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$$

אם $z(t) = x(t) + iy(t)$ אזי

$$z'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) + iy(t) - [x(t_0) + iy(t_0)]}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

בתנאי ש$x'(t_0)$ו$y'(t_0)$ שניהם קיימים.