mschein@math.biu.ac.il

מבחן 80%

בוחן 20% — יהיו שני בחנים, הציון הגבוה יחשב

29.4.2021 בשעה 18:00

3.6.2021 בשעה 10:00

הרצאה 1

<u>הגדרה</u> חוג הינו $(R,+,\cdot)$ כאשר R קבוצה,

$+ : R\times R \to R$

$\cdot : R\times R \to R$

פעולות בינאריות

שמקיימות את האקסיומות הבאות:

1) $(R,+)$ הינה חבורה אבלית

א) $a+(b+c)=(a+b)+c$ לכל $a,b,c\in R$.

ב) קיים איבר $0\in R$ כך ש- $a+0=0+a=a$.

ג) לכל $a\in R$ קיים $-a\in R$ כך ש- $a+(-a)=(-a)+a=0$.

ד) $a+b=b+a$ לכל $a,b\in R$.

2) $(R,\cdot)$ הינה מונואיד.

ה) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ לכל $a,b,c\in R$.

ו) קיים איבר $1\in R$ כך ש- $a\cdot 1=1\cdot a=a$ לכל $a\in R$.

3) החוק הדיסטריבוטיבי (פילוג)

ז) $a(b+c)=ab+ac$

ח) $(a+b)c=ac+bc$

לכל $a,b,c\in R$.

<u>דוגמאות</u> 1) $R=\mathbb{Z}$ עם חיבור וכפל "הרגילים"

2) יהי $n\geq 1$, $R=\mathbb{Z}_n$ עם חיבור וכפל של מחלקות.

<u>הערה</u> בהגדרה של חוג דרשנו את הקיום של יחידה בכפל, כלומר $1\in R$.

$(R,+,\cdot)$ שמקיים את כל האקסיומות חוץ מן השישית (כלומר $(R,\cdot)$ אגודה (חבורה למחצה)) ולא בהכרח מונויד) נקרא חוג בלי יחידה.

יש ספרים שקוראים לחוג-בלי-יחידה חוג לחוג עם יחידה חוג

<u>דוגמאות</u> 3) $2\mathbb{Z}=\{$כל השלמים הזוגיים$\}$ עם חיבור וכפל רגילים.

חוג בלי יחידה. אך לא חוג.

4) החוג הטריויאלי $R=\{e\}$ $e+e=e$, $e\cdot e=e$ $e=0=1$

<u>טענה</u> יהי R חוג (אפילו בלי יחידה). אזי $a\cdot 0=0\cdot a=0$ לכל $a\in R$.

<u>הוכחה</u>

$a\cdot b=(a+0)\cdot b=ab+0\cdot b$

נחבר $-ab$:

$0=0\cdot b$

דוגמה יהי R חוג לא טריויאלי! אזי $0\neq 1$.
כי נניח שלא. אזי קיים $a\in R$ כך ש- $a\neq 0$

$$a\cdot 0=0$$
$$a\cdot 1=a\neq 0$$

הגדרות אם $ab=ba$ לכל $a,b\in R$ אזי R נקרא חוג חילופי (קומוטטיבי).

2) אם לכל $a\neq 0$ קיים $a^{-1}\in R$ כך ש- $aa^{-1}=a^{-1}a=1$, אזי R נקרא חוג עם חילוק.

3) אם R גם חוג עם חילוק וגם חילופי, אזי R נקרא שדה.

חוגים לדוגמאות

5) $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{F}_p$ כל שדה הינו חוג.

6) חוג פולינומים. יהי R חוג כלשהו.

$R[x]$ חילופי אם ורק אם R חילופי

$$R[x]=\left\{\sum_{i=0}^{N} a_i x^i,\quad N\in\mathbb{N},\ a_i\in R\right\}$$

$$f=\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$
$$g=\sum_{i=0}^{M} b_i x^i$$

$$f+g=\sum_{i=0}^{\max\{N,M\}}(a_i+b_i)x^i$$

$$fg=\sum_{i=0}^{N+M}\left(\sum_{j=0} a_j b_{i-j}\right)x^i$$

ט') פולינומים ב-n משתנים

$$R[x_1,x_2,\dots,x_n]=\left\{\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n} a_{i_1 i_2\dots i_n}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \;\middle|\; a_{i_1,\dots,i_n}\in R\right\}$$

יש רק מספר סופי של מקדמים לא אפסיים

$$f+g=\sum_{(i_1,\dots,i_n)}\left(a_{i_1,\dots,i_n}+b_{i_1,\dots,i_n}\right)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

$$fg=\sum_{(i_1,\dots,i_n)}\left(\sum_{\substack{(j_1,\dots,j_n)\\ j_k\le i_k}} a_{j_1,\dots,j_n}\, b_{i_1-j_1,\, i_2-j_2,\dots,\, i_n-j_n}\right)x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

לכל $1\le k\le n$

י"ט) חוג פולינומים עם $\aleph_0$ משתנים

$$R[x_1,x_2,\dots]=\left\{\sum_{\underline{i}=(i_1,i_2,i_3,\dots)} a_{\underline{i}}\,(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots)\;\middle|\;\text{רק מספר סופי של מקדמים לא אפסיים}\right\}$$

$\underline{a}_i\in R$

<u>דוגמא:</u>

$$a_{2,0}x_1^2+a_{1,1}x_1x_2+a_{0,17}x_2^{17} \qquad a,b,c\in R$$

$$a_{1,17}x_1x_2^{17}+a_{1,18}x_1x_2^{18}$$

ד) חוג פולינומים במשתנים לא מתחלפים

$R\langle x,y\rangle \qquad f = ax^2y + bxyx \qquad a,b,c,d\in R$

$$g = cx + dyx$$

$$fg = ac\,x^2yx + ad\,x^2y^2x + bc\,xyx^2 + bd\,xyxyx$$

כל פולינום הינו סכום של מספר סופי של מונומים.

מקדמים ומשתנים מתחלפים זה עם זה,

אך לא מקדמים עם מקדמים ולא משתנים עם משתנים.

ה') $R\langle x_1,x_2,\dots\rangle$

אינסוף משתנים לא מתחלפים.

ו) R חוג כלשהו, חוג של טורי חזקות (פורמליים)

R חילופי $\Rightarrow$ חילופי

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \;\middle|\; a_i\in R \right\}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i+b_i)x^i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)x^i$$

ו') $R[[x_1,x_2,x_3,\dots,x_n]]$

9) R חוג כלשהו

$$M_n(R) = \left\{ \begin{array}{r} n\times n \text{ מטריצות} \\ \text{עם איברים ב-}R \end{array} \right\}$$

חיבור וכפל של מטריצות

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

מדוע לא אוכל להגדיר $M_{\aleph_0}(R)$?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{12} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

לחבר זה לא בעיה

$$(AB)_{11} = \sum_{j=\varphi}^{\infty} a_{1j} b_{j1} \leftarrow$$

אבל אני לא יודע מה זה כי אני רק יכול לחבר מספר סופי של איברים של R.

10) $R[x]$ "חוג" פולינומים

חיבור: חיבור של פולינומים

כפל: הרכבה של פונקציות

זה מקיים את כל האקסיומות חוץ מפילוג

$$(f_1+f_2)\circ g = f_1\circ g + f_2\circ g$$

אין בהכרח כלל $f\circ(g_1+g_2) \neq f\circ g_1 + f\circ g_2$

לדוגמא, $f=x^2$, $g_1=x$, $g_2=x+1$, $R=\mathbb{Z}$

$$f\circ(g_1+g_2) = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$$

$$f\circ g_1 + f\circ g_2 = x^2+(x+1)^2 = 2x^2+2x+1$$

לכן הדוגמא הנ"ל אינה חוג, כי מתקיים פילוג מימין אך לא משמאל.

ii) S קבוצה כלשהי.

$$R = \mathcal{P}(S) = \{A : A\subseteq S\}$$

$A+B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ הפרש סימטרי

$AB = A\cap B$

$0=\emptyset$ $\quad -A = A$

$1=S$

לכל A,

$A^2=A$ (חוג בוליאני)

יג) G חבורה כלשהי, R חוג כלשהו

"חוג של חבורה"

$$R[G]=\left\{\sum_{g\in G} a_g\cdot g \;\middle|\; a_g\in R \right\}$$

רק מספר סופי של a_g לא אפסיים

$$\left(\sum_{g\in G} a_g\cdot g\right)+\left(\sum_{g\in G} b_g\cdot g\right)=\sum_{g\in G}(a_g+b_g)\,g$$

$$\left(\sum_{g\in G} a_g\cdot g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g\cdot g\right)=\sum_{g\in G}\Big(\underbrace{\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}}\Big)g$$

מספר סופי של מחוברים לא אפסיים

$G=S_3$

$R=\mathbb{Z}$

$a=2(1\,2\,3)+(1\,2)$

$b=3(1\,3)$

$$ab=6(1\,2\,3)(1\,3)+3(1\,2)(1\,3)=6(2\,3)+3(1\,3\,2)$$

$R[\mathbb{Z}]$ "פולינומים של לורן Laurent"