07.08.14 תרגול 8 בס"ד

הגדרה: תהא A מטריצה. A נקר' סימטרית אם $A=A^T$.
A תקרא נק' חיובית אם"ם מתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

$$\forall x \neq 0 \,;\, X^t A X > 0 \quad \text{(1}$$

2) כל הע"ע של A גדולים מ-0.

3) כל המינורים הראשיים של A גדולים מ-0.

תרגיל: (תורה המט')

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

הוכח ש- A סימטרית חיובית ב-3 דרכים שונות:

פתרון: סימטרית: $A=A^T$ ✓

חיובית: (1)

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$X^T A X = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2 \quad -x_1+2x_2-x_3 \quad -x_2+2x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 =$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 + x_1^2 =$$

$$= (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 + x_1^2 > 0.$$

(2) λ ע"ע של A אמ"מ $|\lambda I - A| = 0$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\cdot\left[(\lambda-2)^2-1\right] - (\lambda-2) = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} > 0$$

כל הע"ע חיוביים $\Rightarrow$ המט' חיובית.

(3)

$$M_1 = |2| > 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

משפט: כאשר מט' A סימטרית ומוגדרת חיובית, ניתן לפרק אותה באופן הבא: נבצע פירוק LU, ונסמן:

(פירוק cholsky)

$$U = \underbrace{D}_{\text{איברי האלכסון}} + \underbrace{U_1}_{\text{שאר המט' העליונה}}$$

נסמן: $R = L \cdot \sqrt{D}$

ואז: $A = RR^T$

על מנת למצוא פתרון למשוואה $Ax = b$
נבצע חילוף לפנים ולאחור ונמצא את X.

$$Ax = b \Rightarrow A = R \cdot \underbrace{R^T \cdot X}_{y} = b$$

$$R^T \cdot X = y$$

דוגמא: נתונה המט':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

פרקו את A פירוק cholsky:

פיתרון: A סימטרית כי $A = A^T$.

$$M_1 = 1 > 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$\leftarrow$

בס"ד

המשך:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

נבצע פירוק LU:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & \boxed{12} & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1}$$

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$L \cdot \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = R$$

נקבל פירוק $R \cdot R^T = A$

בס״ד

פירוק QR:

נפרק את A לכפל מט' באופן הבא:

$$A=QR$$

R - משולשית עליונה

Q - מט' המקיימת $Q^{-1}=Q^T$

ואז בהינתן משוואה $Ax=b$

$$Q\cdot R\cdot x=b \;/\cdot Q^T$$

$$\underbrace{Q^T\cdot Q}_{=I}\, R\cdot x = \underline{Q^T\cdot b}$$

אלגוריתם: עבור $k=1:n-1$

(1) לוקחים את העמודה ה-k של A ומנרמלים אותה (בנורמה 2).

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{kk} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

(2) נסמן $D=\pm\sqrt{d_k^2+\dots+d_n^2}$

נבחר (+) עבור $d_k\le 0$ אחרת נבחר (−).

(3) נבנה וקטור V בצורה הבאה:

$$V_j=\begin{cases} 0 & 1\le j\le k-1 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{d_k}{D}\right) & j=k \\ \frac{d_j}{-2DV_k} & k+1\le j\le n \end{cases}$$

(4) נסמן $H_k=I-2V\cdot V^T$

(5) $A=H_k\cdot A$

נפסיק כאשר A תהיה משולשית עליונה. $(k=n-1)$

ונסמן $R=A_{new}$

$$Q=H_{n-1}\cdot H_{n-2}\cdots H_1$$

בס"ד

פירוק QR

דוגמא: מצא פירוק QR עבור המטריצה $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$

פתרון: נבצע את הפירוק עבור שתי עמודות ראשונות.

:K=1

1. ננרמל את העמודה הראשונה
$$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9045\\0.3015\\0.3015\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$$

2. $D=\pm\sqrt{(0.9045)^2+(0.3015)^2+(0.3015)^2}=-1$

בחרנו – כיוון ש $d_1>0$.

3.
$$v_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{0.9045}{-1}\right)}=0.9758$$
$$v_2=-\frac{d_2}{2\cdot D\cdot v_1}=-\frac{0.3015}{2\cdot(-1)\cdot 0.9758}=0.1545$$
$$v_3=-\frac{d_3}{2\cdot D\cdot v_1}=-\frac{0.3015}{2\cdot(-1)\cdot 0.9758}=0.1545$$
$$\Rightarrow v=\begin{pmatrix}0.9759\\0.1545\\0.1545\end{pmatrix}$$

4.
$$H_1=I-2vv'=I-2\begin{pmatrix}0.9758\\0.1545\\0.1545\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.9758&0.1545&0.1545\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-0.9045&-0.3015&-0.3015\\-0.3015&0.9523&-0.0477\\-0.3015&-0.0477&0.9523\end{pmatrix}$$

5.
$$A_1=H_1A=\begin{pmatrix}-0.9045&-0.3015&-0.3015\\-0.3015&0.9523&-0.0477\\-0.3015&-0.0477&0.9523\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-3.1362&-2.1105&-2.1105\\0&2.5075&0.5075\\0&0.5075&2.5075\end{pmatrix}$$

: K=2

1. ננרמל את העמודה ~~הראשונה~~ השנייה

$$\begin{pmatrix}-2.1105\\2.5075\\0.5075\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac{-2.1105}{3.3105}\\ \frac{2.5075}{3.3105}\\ \frac{0.5075}{3.3105}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.6364\\0.7561\\0.1530\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$$

2. $$D=\pm\sqrt{(0.7561)^2+(0.1530)^2}=-0.7714$$

בחרנו – כיוון ש $d_2>0$.

3.
$$v_1=0$$
$$v_2=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{d_2}{D}\right)}=0.995$$
$$v_3=-\frac{d_3}{2\cdot D\cdot v_2}=0.0997$$
$$\Rightarrow v=\begin{pmatrix}0\\0.995\\0.0997\end{pmatrix}$$

4.
$$H_2=I-2vv^t=I-2\begin{pmatrix}0\\0.995\\0.0997\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0.995&0.0997\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-0.9801&-0.1984\\0&-0.1984&0.9801\end{pmatrix}$$

5.
$$A_2=H_2A_1=\overset{H_2}{\begin{pmatrix}-0.9045&-0.3015&-0.3015\\-0.3015&0.9523&-0.0477\\-0.3015&-0.0477&0.9523\end{pmatrix}}\overset{A_1}{\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}}=$$
$$=\begin{pmatrix}-3.1362&-2.1105&-2.1105\\0&2.5582&-0.9949\\0&0&2.3570\end{pmatrix}=R$$

$$\Rightarrow R=\begin{pmatrix}-3.1362&-2.1105&-2.1105\\0&2.5582&-0.9949\\0&0&2.3570\end{pmatrix}$$

$$Q=H_1^tH_2^t=\begin{pmatrix}-0.9047&0.3554&-0.2357\\-0.3016&-0.9239&-0.2357\\-0.3016&-0.1421&0.9428\end{pmatrix}$$

שיטות רקורסיביות למציאת וקטור הפתרונות

הרעיון: ניקח את המערכת $Ax=b$ ונמצא קירוב איטרטיבי למקטור x ע"י $X_{k+1}=B\cdot X_k+C$ כאשר B - מטריצה, C - וקטור.

משפט התכנסות: אם A בעלת אלכסון דומיננטי, אזי למערכת קיים פתרון יחיד, ולכן לכל וקטור התחלתי המערכת תתכנס.

תנאי מספיק: $\|B\|<1$

(אם"ם) **תנאי מספיק והכרחי:** $\rho(B)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i(B)|<1$

שיטת יעקובי: (זהו לא פירוק LU).

נפרק את המטריצה A: $A=L+D+U$

כאשר: L - משולשית תחתונה

D - אלכסונית

U - משולשית עליונה

$$B=-D^{-1}(L+U) \quad ; \quad C=D^{-1}\cdot b$$

$$\boxed{X_{n+1}=-D^{-1}(L+U)\cdot X_n+D^{-1}b.}$$

דוגמא:

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+10x_2+4x_3=6 \\ 4x_2+5x_3=5 \end{cases}$$

ותנאי התחלה: $(0,0,0)$

(1) הוכח שהמערכת מתכנסת בשיטה איטרטיבית.

(2) כתוב נוסחה איטרטיבית למציאת הקירוב.

(3) בצע 6 איטרציות.

פתרון:

א

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A - בעלת אלכסון דומיננטי ולכן השיטה האיטרטיבית תתכנס.

ב

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = D^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X_{n+1} = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X_n + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	0	1	2	3	4	5	6
X_1	0	0.5	0.2	0.45	0.324	0.429	0.376
X_2	0	0.6	0.1	0.352	0.142	0.248	0.16
X_3	0	1	0.52	0.92	0.718	0.886	0.802

גאוס-זיידל:

אותה השיטה האיטרטיבית, רק שהפעם אנו מעדכנים כל הזמן את הערכים של וקטור הפתרונות X.

איטרציה כזו נתונת לכתיבה בצורה הבאה:

$$X_{k+1} = -D^{-1} L \cdot X_{k+1} - D^{-1} U \cdot X_k + D^{-1} b$$

דוגמא: נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

בצע 2 איטרציות בשיטת גאוס-זיידל.

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: ניתן לראות ש-A בעלת אלכסון דומיננטי ולכן השיטה מתכנסת.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0.33 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = D^{-1} b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.66 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0.33 \\ 0 & 0.5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X_n + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.66 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ X_1^{(3)} \end{pmatrix}; \quad X_1^{(1)} = 0.5$$

$$X_1^{(2)} = 2.8333$$

$$X_1^{(3)} = B \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.8333 \\ 0 \end{pmatrix} + C = -1.0833$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.8333 \\ -1.0833 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_2^{(1)} \\ X_2^{(2)} \\ X_2^{(3)} \end{pmatrix} \Rightarrow X_2^{(1)} = B \cdot X_1 + C = 1.967$$

$$X_2^{(2)} = B \cdot \begin{pmatrix} 1.967 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix} + C = 2.944$$

$$X_2^{(3)} = B \cdot \begin{pmatrix} 1.967 \\ 2.944 \\ -1.0833 \end{pmatrix} + C = -1.0278$$

$$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1.967 \\ 2.944 \\ -1.0278 \end{pmatrix}$$

איטרציה כן נתונות להציגה בצורה:

$$x_{k+1} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{B}\cdot x_k + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{C}$$

הערות:

1) ברוב המקרים גאוס-זיידל מתכנס מהר יותר מיעקובי.

2) בחלק מהמקרים גאוס-זיידל לא מתכנס ויעקובי **כן**!

שאלה: ניתן לפתור את המערכת הבאה בעזרת גאוס-זיידל או יעקובי.

יש לנו אלכסון משני דומיננטי (נבצע החלפת שורות)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 2 & 4 & \boxed{8} & 0 & 14 \\ 2 & \boxed{6} & 1 & 1 & 10 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

[נחליף שורות ואז יהיה לנו אלכסון ראשי דומיננטי והשיטה תתכנס].

הסבר כיצד ניתן לעשות זאת כדי שהשיטה תתכנס.

פתרון: נרצה שעבור A יהיה אלכסון דומיננטי ולכן נבצע החלפת שורות:

$R_2 \longleftrightarrow R_3$

$R_1 \longleftrightarrow R_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

עכשיו ל-A יש אלכסון דומיננטי והאיטרציות יתכנסו.