מבנים אלגבריים - תירגול 2

30 באוקטובר 2015

הגדרה: תהא Gחבורה, a,b יקראו מתחלפים אם $ab=ba$. למשל: מחזורים זרים ב S_n.
למשל כל שני איברים ב $\mathbb{Z}$.
הגדרה: G תקרא חבורה חילופית אם כל שני איברים מתחלפים. למשל $\mathbb{Z},\mathbb{R}$. למשל S_3 אינה חילופית כי ראינו ש $(1,2)(2,3)\neq(2,3)(1,2)$(ולכן גם S_n עבור $n>3$ אינה חילופית)
הגדרה: תהא G חבורה אזי המרכז שלה מוגדר $C(G)=Z(G)=\{g\in G \mid \forall x\in G: gx=xg\}$.
למשל $Z(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
טענה $Z(S_n)=\{id\}$ אם $n>2$
הוכחה: יהא $f\in Z(S_n)$ נראה כי $f(j)=j$ לכל j . נניח בשלילה כי קיים j כך ש $f(j)=i\neq j$
מהגדרת המרכז נובע כי $fg=gf$ לכל $g\in S_n$ בפרט עבור החילוף$(i,j)-g$. נחשב

$$fg(i)=f(j)=i$$

מצד שני

$$g(f(i))=\begin{cases} f(i) & f(i)\neq i,j \\ i & f(i)=j \\ j & f(i)=i \end{cases}$$

כיוון שהם שווים נקבל כי $f(i)=j$. נבחר כעת $k\neq i,j$ (אפשר כי $n>2$) ונסתכל כעת על $h=(i,j,k)$
נחשב

$$fh(i)=f(j)=i$$

מצד שני

$$hf(i)=h(j)=k$$

סתירה.
הגדרה: תהא G חבורה. $A\subseteq G$ המרכז של A הוא $C(A)=\{g\in G \mid \forall a\in A: ag=ga\}$
סימון $C(\{g\})=C(g)$
למשל: מצא את המרכז של $(1,2,3)\in S_n$.

פתרון : צריכים למצוא את כל $\sigma \in S_n$ המקיימות $\sigma\left(1,2,3\right)=\left(1,2,3\right)\sigma$ או באופן שקול

$$\sigma\left(1,2,3\right)\sigma^{-1}=\left(1,2,3\right)$$

לפי ש.ב. $\sigma\left(1,2,3\right)\sigma^{-1}=\left(\sigma\left(1\right),\sigma(2),\sigma(3)\right)$ ולכן מהשיוון

$$\left(1,2,3\right)=\left(\sigma\left(1\right),\sigma(2),\sigma(3)\right)$$

נקבל כי אם $\sigma\neq id,\left(1,2,3\right),\left(1,3,2\right)=\left(1,2,3\right)^i$ אזי בפירוק למחזורים זרים $\sigma=\tau\left(1,2,3\right)^i$ כאשר τ זר ל $\left(1,2,3\right)$.