פתרון תרגיל 7

שאלה 1

בדקו את ההתכנסות ואת ההתכנסות בהחלט של האינטגרלים הבאים:

א. $\int_2^\infty \frac{sin^2x}{x}\ dx$

מכיוון שפונקציה $\frac{sin^2x}{x}$ שנמצאת תחת האינטגרל היא חיובית לכן מספיק לבדוק רק ההתכנסות רגילה .

$\int_2^\infty \frac{sin^2x}{x}$dx=$\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx$=$\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$

נוכיח כי האינטגרל $\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ מתכנס.

נשתמש בקריטריון דיריכלה . נסמן f(x)= $\cos 2x$, g(x)= $\frac{1}{x}$

אזי לכל a>2 מתקיים

$\left|\int_2^a \cos 2x\,dx\right| = |\frac{1}{2}$(sin2a-sin4)$| \le 1$Type equation here.

ברור כי g(x) מונוטונית ו $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$=0

לכן על פי קריטריון דיריכלה נובעת ההתכנסות של האינטגרל $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$.

נחזור לשאלה שלנו.

מאחר והאינטגרל $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ מתכנס,והאינטגרל $\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ מתבדר

($\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} lnx$ =∞)

הרי שהאינטגרל $\int_2^\infty \frac{sin^2x}{x}\ dx$ מתבדר וגם מתבדר בהחלט.

ב. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$ cosx dx

נוכיח כ האינטגרל מתכנס בהחלט ולכן בכלל מתכנס.

נבחין כ $\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \geq \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \geq |\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\ \text{cosx}|$

היות ו האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} dx$ מתכנס (מכיוון שחזקה של x

גדולה יותר מ 1) לכן גם האינטגרל שלנו $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$ cosx dx

מתכנס בהחלט ולכן בכלל מתכנס באופן רגיל.

שאלה 2

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $a>0,\ \int_0^\infty e^{-ax}$sinbx dx

בדיוק באותו אופן כמו בשאלה 4 מתרגיל 3 כלומר על ידי אינטגרציה

לפי חלקים פעמיים מקבלים

$\int_0^\infty e^{-ax}$sinbx dx=$\frac{1}{a^2+b^2}\ e^{-ax}$(asinbx-bcosbx)+c

ולכן $\int_0^\infty e^{-ax}$sinbx dx=$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-ax}\ \text{sinbx dx}$ =

=$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{a^2+b^2}\ e^{-at}$(asinbt-bcosbt)- $\frac{1}{a^2+b^2}\ e^{-a0}$(asinb0-bcosbo)

מכיוון ש $a> 0$ ולכן $\lim_{t\to\infty} e^{-at}$ =0 אזי

=$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{a^2+b^2}\ e^{-at}$(asinbt-bcosbt)+ $\frac{b}{a^2+b^2}$ =$\frac{b}{a^2+b^2}$

ב. $\int_0^\infty t^3\ e^{t^2}$dt

בשאלה הזאת יש טעות. ברור כי האינטגרל מתבדר.

הכוונה בשאלה הזאת היתה לחשב האינטגרל הבא: $\int_0^\infty t^3\, e^{-t^2}\mathrm{dt}$Type equation here.

ג. $\int_0^\infty \frac{1}{xln^2x}dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{xln^2x}dx \;=\; \lim_{t\to-1} -\frac{1}{lnt} + \lim_{t\to 0}\frac{1}{lnt} = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{xln^2x}dx \;=\; \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{lnt} + \lim_{t\to+1}\frac{1}{lnt} = \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

שאלה 3

ע"י שימוש בכלל לופיטל, חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to+0} x\int_x^1 \frac{cost}{t^2}dt$$

נשתמש באחת המשפטים על ערך הביניים האינטגרל .

אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ו g אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

אזי $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta)\int_a^b g(x)dx$, $\theta \in [a,b]$.

נסמן $h(x)=\int_x^1 \frac{cost}{t^2}dt$.

נשתמש במשפט על ערך הביניים לאינטגרל $\int_x^1 \frac{cost}{t^2}dt$

נקבל כי $h(x)=cos\theta(\frac{1}{x}-1)$.

ברור כי $\cos\theta(\frac{1}{x}-1) \geq cos1(\frac{1}{x}-1)$

נבחין כי $\lim_{x\to 0} cos1\left(\frac{1}{x}-1\right) = \infty$.here equation Type

נשתמש בכלל לופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to+0}\frac{h(x)}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{h'(x)}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{cosx}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$$

שאלה 4

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

$$\int_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}=\int_2^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}+\int_4^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}=\lim_{b\to4-}\int_2^b\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}+\lim_{a\to4+}\int_a^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

$$\lim_{b\to4-}-3(4-x)^{\frac{1}{3}}\Big|_2^b+\lim_{a\to4+}-3(4-x)^{\frac{1}{3}}\Big|_a^6=\lim_{b\to4-}\left(-3(4-b)^{\frac{1}{3}}+3\sqrt[3]{2}\right)+\lim_{a\to4+}\left(3\sqrt[3]{2}+3(4-a)^{\frac{1}{3}}\right)=6\sqrt[3]{2}$$

ב. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{b\to-1-}\int_{-2}^{b}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

נציב $x=\frac{1}{\cos t}$ במקרה זה גבולות האינטגרציה החדשים הינם

$$x=-2\Rightarrow-2=\frac{1}{\cos t}\Rightarrow\cos t=-\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{2\pi}{3}$$

$$x=-1\Rightarrow-1=\frac{1}{\cos t}\Rightarrow\cos t=-1\Rightarrow t=\pi$$

כלומר הזווית ברביע השני ולכן $\tan t<0$ ולכן

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\tan^2 t}=\left|\tan t\right|=-\tan t$$

$$dx=\frac{\tan t}{\cos t}dt$$

ולכן נקבל

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{b\to-1-}\int_{-2}^{b}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{b\to\pi-}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{b}\frac{\cos t\cdot\tan t}{\cos t\cdot(-\tan t)}dt=\lim_{b\to\pi-}-\left(b-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

שאלה 5

בדקו להתכנסות את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$

$\lim\limits_{x\to1-}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}=\infty$ ולכן האינטגרל הינו אינטגרל לא אמיתי

$\int_0^1\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx=\int_0^1\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x+x^2)}}dx$ ולכן נשווה עם $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}dx$

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x+x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)}}}=\lim_{x\to1-}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{(1+x+x^2)}}=\frac{\sin1+\cos1}{\sqrt[5]{3}}$$

הגבול סופי שונה מאפס ולכן מהתכנסות האינטגרל $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}dx$

נובעת התכנסות האינטגרל המקורי.

ב. $\int_0^1\frac{\cos xdx}{\sqrt[4]{x}-\sin x}$

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}=\infty$, ז"א הפונקציה לא חסומה ולכן האינטגרל הינו

אינטגרל לא אמיתי.

נשווה עם $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\sqrt[4]{x}\left(1-x+o(x)\right)}=1$$

הגבול סופי שונה מאפס ולכן מהתכנסות האינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

נובעת התכנסות האינטגרל המקורי.

ג. $\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}=\infty$, ז"א הפונקציה לא חסומה ולכן האינטגרל הינו

אינטגרל לא אמיתי.

נשווה עם $\int_0^1\frac{1}{x}dx$.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{xe^x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x\left(1+x+o(x)\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x\left(1+x+o(x)\right)}{x\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(1+x\left(1+\frac{o(x)}{x}\right)\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}}=\sqrt{2}$$

הגבול סופי שונה מאפס ולכן מהתבדרות האינטגרל $\int_0^1\frac{1}{x}dx$

נובעת התבדרות האינטגרל המקורי.